BỔ ĐỀ HOÁN VỊ

Nguyễn Văn Huyện

(SV trường Đại học GTVT, thành phố Hồ Chí Minh)

1. Mở đầu

Năm 2008 trên diễn đàn toán học Art of Problem Solving (xem tại đây) anh Võ Quốc Bá Cẩn đề xuất một bổ đề khá thú vị sau:

Bổ đề. *Với mọi số thực dương $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $a+b+c=1$, đặt $q=ab+bc+ca$ $(1 \geqslant 3q)$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant \frac{2(27q^2-9q+1)}{9q^2-2q+(1-3q)\sqrt{q(1-3q)}}+\frac{1}{q}-6. \tag{1.1}$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Đặt $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$ và $r=abc$ (ta sẽ thống nhất cách đặt này cho cả bài viết) khi đó

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2=p^2q^2-4q^3+2p(9q-2p^2)r-27r^2.$$

Ta có đánh giá

$$\begin{aligned}
2(ab^2+bc^2+ca^2) &= \sum ab(a+b)+(a-b)(b-c)(c-a)\\
&= pq-3r+(a-b)(b-c)(c-a)\\
&\geqslant pq-3r-\sqrt{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}\\
&= pq-3r-\sqrt{p^2q^2-4q^3+2p(9q-2p^2)r-27r^2},
\end{aligned}$$

vì thế

$$ab^2+bc^2+ca^2 \geqslant \frac{pq-3r-\sqrt{p^2q^2-4q^3+2p(9q-2p^2)r-27r^2}}{2}.$$

Mặt khác từ giả thiết ta được $p=1$ cho nên

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{abc} \geqslant \frac{q-3r-\sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2}}{2r}.$$

Xét hàm số

$$f(r)=\frac{q-3r-\sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2}}{2r},$$

tính đạo hàm

$$f'(r)=\frac{q^2-4q^3+(9q-2)r-q\sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2}}{2r^2\sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2}},$$

do đó phương trình $f'(r) = 0$ có nghiệm

$$r = r_0 = \frac{q^2\left[9q^2 - 2q + (1-3q)\sqrt{q(1-3q)}\right]}{27q^2 - 9q + 1}.$$

Lập bảng biến thiên ta được $f(r) \geqslant f(r_0)$. Biến đổi

$$\begin{aligned}
f(r_0) &= \frac{q - 3r_0 - \sqrt{q - 4q^3 + 2(9q-2)r_0 - 27r_0^2}}{2r_0} \\
&= \frac{q - 3r_0 - \frac{q^2 - 4q^3 + (9q-2)r_0}{q}}{r_0} \\
&= \frac{2q^3 + (1-6q)r_0}{qr_0} = \frac{2q^2}{r_0} + \frac{1}{q} - 6 \\
&= \frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1-3q)\sqrt{q(1-3q)}} + \frac{1}{q} - 6.
\end{aligned}$$

Đây chính là điều phải chứng minh. □

Nhận xét.

(1) Ở thời điểm đó bổ đề trên là một bài toán rất khó, do hình thức khá cồng kềnh, không đẹp mắt (có căn thức nằm ở mẫu số) nên không nhận được sự quan tâm của nhiều người, sau này vào năm 2011 anh Lê Hữu Điền Khuê mới đưa ra một chứng minh khác trên Diễn Đàn Toán Học (xem tại đây).

(2) Đây là một kết quả rất chặt với vô số các trường hợp để đẳng thức xảy ra và cũng là dạng chặt nhất trong lớp các bài toán có dạng

$$f\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}, a+b+c, ab+bc+ca\right) \geqslant 0.$$

(3) Bổ đề này sẽ giúp chúng ta sẽ giải quyết được rất nhiều bài toán khó sau đây (đã từng là unsolve suốt một thời gian dài trên AoPS).

2. Các bài toán áp dụng

Bài toán 1. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{28(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \geqslant 12.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Do tính thuần nhất của bài toán nên ta có thể chuẩn hóa $p = 1$, khi đó

$$\frac{28(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} = \frac{28q}{p^2} = 28q.$$

Áp dụng bổ đề (1.1) ta đưa bài toán về chứng minh

$$\frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1-3q)\sqrt{q(1-3q)}} + \frac{1}{q} - 6 + 28q \geqslant 12,$$

hay là

$$\frac{2(27q^2-9q+1)}{9q^2-2q+(1-3q)\sqrt{q(1-3q)}}+\frac{1}{q}+28q \geqslant 18. \tag{2.1}$$

Bất đẳng thức lúc này chỉ còn một biến nên hai công cụ đầu tiên mà chúng ta nghĩ đến là khảo sát hàm hoặc quy đồng phân tích nhân tử. Tuy nhiên biểu thức này khi lấy đạo hàm sẽ cho ra một kết quả *"rất khủng"* còn nếu phân tích nhân tử thì thì biểu thức thu được cũng không khá hơn mấy vì sự xuất hiện của căn thức ở mẫu.

Viết (2.1) lại như sau

$$\frac{2(27q^2-9q+1)}{9q^2-2q+(1-3q)\cdot q\cdot\sqrt{\frac{1-3q}{q}}}+\frac{1}{q}+28q \geqslant 18. \tag{2.2}$$

Đặt $x=\sqrt{\frac{1-3q}{q}}\geqslant 0$ thì $q=\frac{1}{x^2+3}$, bất đẳng thức (2.2) trở thành

$$\frac{2(x^2+3x+3)}{x+1}+x^2+\frac{28}{x^2+3}\geqslant 15.$$

Xét hiệu hai vế ta được

$$\frac{2(x^2+3x+3)}{x+1}+x^2+\frac{28}{x^2+3}-15=\frac{(x^3+5x^2+3x+1)(x-1)^2}{(x+1)(x^2+3)}\geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi và chỉ khi

$$\frac{a}{\sqrt{7}-\tan\frac{\pi}{7}}=\frac{b}{\sqrt{7}-\tan\frac{2\pi}{7}}=\frac{c}{\sqrt{7}-\tan\frac{4\pi}{7}}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 2. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{7(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geqslant\frac{17}{2}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Tương tự như trên ta cũng chuẩn hóa $p=1$, khi đó

$$\frac{7(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}=\frac{7q}{p^2-2q}=\frac{7q}{1-2q}.$$

Áp dụng bổ đề (1.1) ta đưa bài toán về chứng minh

$$\frac{2(27q^2-9q+1)}{9q^2-2q+(1-3q)\sqrt{q(1-3q)}}+\frac{1}{q}-6+\frac{7q}{1-2q}\geqslant\frac{17}{2},$$

hay là

$$\frac{2(27q^2-9q+1)}{9q^2-2q+(1-3q)\cdot q\cdot\sqrt{\frac{1-3q}{q}}}+\frac{1}{q}+\frac{7q}{1-2q}\geqslant\frac{29}{2}. \tag{2.3}$$

Đặt $x = \sqrt{\frac{1-3q}{q}} \geqslant 0$ thì $q = \frac{1}{x^2+3}$, bất đẳng thức (2.3) trở thành

$$\frac{2(x^2+3x+3)}{x+1} + x^2 + \frac{7}{x^2+1} \geqslant \frac{23}{2},$$

tương đương với

$$\frac{(2x^3+10x^2+9x+3)(x-1)^2}{2(x+1)(x^2+1)} \geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a}{\sqrt{7}-\tan\frac{\pi}{7}} = \frac{b}{\sqrt{7}-\tan\frac{2\pi}{7}} = \frac{c}{\sqrt{7}-\tan\frac{4\pi}{7}}.$$

Bài toán được chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán này là hệ quả của bài toán 1. Thật vậy vì

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 12 - \frac{28(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2},$$

nên ta chỉ cần chứng minh

$$12 - \frac{28(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} + \frac{7(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geqslant \frac{17}{2},$$

hay là

$$\frac{7(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)} \geqslant \frac{28(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2},$$

hoặc

$$8(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2) \leqslant (a+b+c)^4.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$8(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2) \leqslant \left[2(ab+bc+ca)+(a^2+b^2+c^2)\right]^2 = (a+b+c)^4.$$

Khi đẳng thức xảy ra thì ta được đẳng thức khá đẹp mắt $a^2+b^2+c^2 = 2(ab+bc+ca)$.

Bài toán 3. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 + \frac{70(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geqslant 60.$$

(Nguyễn Văn Huyện)

Lời giải. Chuẩn hóa $p = 1$ và áp dụng bổ đề (1.1) ta đưa bài toán về chứng minh

$$\left[\frac{2(27q^2-9q+1)}{9q^2-2q+(1-3q)\sqrt{q(1-3q)}} + \frac{1}{q} - 6\right]^2 + \frac{70q}{1-2q} \geqslant 60. \tag{2.4}$$

Đặt $x = \sqrt{\frac{1-3q}{q}} \geqslant 0$ thì $q = \frac{1}{x^2+3}$, bất đẳng thức (2.4) trở thành

$$\left(\frac{x^3+3x^2+3x+3}{x+1}\right)^2 + \frac{70}{x^2+1} \geqslant 60,$$

tương đương với

$$\frac{(x^6+8x^5+31x^4+84x^3+119x^2+76x+19)(x-1)^2}{(x^2+1)(x+1)^2} \geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a}{\sqrt{7}-\tan\frac{\pi}{7}} = \frac{b}{\sqrt{7}-\tan\frac{2\pi}{7}} = \frac{c}{\sqrt{7}-\tan\frac{4\pi}{7}}.$$

Bài toán được chứng minh. □

Bài toán 4. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 + \frac{280(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \geqslant 95.$$

(Tạ Hồng Quảng)

Lời giải. Chuẩn hóa $p=1$ và áp dụng bổ đề (1.1) ta đưa bài toán về chứng minh

$$\left[\frac{2(27q^2-9q+1)}{9q^2-2q+(1-3q)\sqrt{q(1-3q)}} + \frac{1}{q} - 6\right]^2 + 280q \geqslant 95. \tag{2.5}$$

Đặt $x=\sqrt{\frac{1-3q}{q}} \geqslant 0$ thì $q=\frac{1}{x^2+3}$, bất đẳng thức (2.5) trở thành

$$\left(\frac{x^3+3x^2+3x+3}{x+1}\right)^2 + \frac{280}{x^2+3} \geqslant 95,$$

tương đương với

$$\frac{(x^6+8x^5+33x^4+100x^3+144x^2+88x+22)(x-1)^2}{(x^2+3)(x+1)^2} \geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a}{\sqrt{7}-\tan\frac{\pi}{7}} = \frac{b}{\sqrt{7}-\tan\frac{2\pi}{7}} = \frac{c}{\sqrt{7}-\tan\frac{4\pi}{7}}.$$

Bài toán được chứng minh. □

Bài toán 5. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}.$$

(Nguyễn Văn Quý)

Lời giải. Chuẩn hóa $p = 1$ và áp dụng bổ đề (1.1) ta đưa bài toán về chứng minh

$$\frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1 - 3q)\sqrt{q(1 - 3q)}} + \frac{1}{q} - 6 \geqslant \frac{1 - 2q}{q} + 6(1 - 2q). \tag{2.6}$$

Đặt $x = \sqrt{\frac{1-3q}{q}} \geqslant 0$ thì $q = \frac{1}{x^2+3}$, bất đẳng thức (2.6) trở thành

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{x + 1} \geqslant \frac{(x^2 + 9)(x^2 + 1)}{x^2 + 3},$$

hay là

$$\frac{2x^2(x - 1)^2}{(x + 1)(x^2 + 3)} \geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc

$$\frac{a}{\sqrt{7} - \tan\frac{\pi}{7}} = \frac{b}{\sqrt{7} - \tan\frac{2\pi}{7}} = \frac{c}{\sqrt{7} - \tan\frac{4\pi}{7}}.$$

Chứng minh hoàn tất. □

Bài toán 6. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{k(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} \geqslant 3 + k,$$

trong đó $k = 3\sqrt[3]{4} - 2$.

(Ji Chen)

Lời giải. Chuẩn hóa $p = 1$ và áp dụng bổ đề (1.1) ta đưa bài toán về chứng minh

$$\frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1 - 3q)\sqrt{q(1 - 3q)}} + \frac{1}{q} + \frac{kq}{1 - 2q} \geqslant 9 + k. \tag{2.7}$$

Đặt $x = \sqrt{\frac{1-3q}{q}} \geqslant 0$ thì $q = \frac{1}{x^2+3}$ bất đẳng thức (2.7) trở thành

$$\frac{2(x^2 + 3x + 3)}{x + 1} + x^2 + \frac{k}{x^2 + 1} \geqslant k + 6,$$

hay là

$$\frac{x^2[x^3 + 3x^2 + (1 - k)x - k + 3]}{(x + 1)(x^2 + 1)} \geqslant 0.$$

Bất đẳng thức này đúng vì với $k = 3\sqrt[3]{4} - 2$, thì

$$x^3 + 3x^2 + (1 - k)x - k + 3 = \left(x + 1 + 2\sqrt[3]{2}\right)\left(x + 1 - \sqrt[3]{2}\right)^2 \geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ hoặc $x = \sqrt[3]{2} - 1$, cụ thể

- Nếu $x = 0$ thì $q = \frac{1}{3}$ kết hợp với $p = 1$ ta được $a = b = c$.

- Nếu $x = \sqrt[3]{2} - 1$ thì $q = \frac{2+\sqrt[3]{2}}{10}$ dẫn đến $r = \frac{3-\sqrt[3]{2}}{50}$, kết hợp với $p = 1$ ta thấy a, b, c lần lượt là ba nghiệm của phương trình

$$t^3 - t^2 + \frac{2+\sqrt[3]{2}}{10}t - \frac{3-\sqrt[3]{2}}{50} = 0.$$

Bằng Maple hoặc Wolframalpha ta tìm được

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{8-6\sqrt[3]{2}}{5}}\cos\left(\dfrac{1}{3}\arccos\sqrt{\dfrac{101-54\sqrt[3]{4}}{20}}\right) \\ b = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{8-6\sqrt[3]{2}}{5}}\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{1}{3}\arccos\sqrt{\dfrac{101-54\sqrt[3]{4}}{20}}\right) \\ c = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{8-6\sqrt[3]{2}}{5}}\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{3}\arccos\sqrt{\dfrac{101-54\sqrt[3]{4}}{20}}\right) \end{cases}$$

cùng các hoán vị.

Bài toán được chứng minh. □

Bài toán 7. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + k \geqslant \frac{(9+3k)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2},$$

với $k = 3\sqrt[3]{2} - 3$.

(Võ Quốc Bá Cẩn, Bách Ngọc Thành Công)

Lời giải. Chuẩn hóa $p = 1$ và áp dụng bổ đề (1.1) ta đưa bài toán về chứng minh

$$\frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1-3q)\sqrt{q(1-3q)}} + \frac{1}{q} - 6 + k \geqslant (9+3k)(1-2q). \tag{2.8}$$

Đặt $x = \sqrt{\frac{1-3q}{q}} \geqslant 0$ thì $q = \frac{1}{x^2+3}$, bất đẳng thức (2.8) trở thành

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{x+1} + k \geqslant \frac{(9+3k)(x^2+1)}{x^2+3}.$$

Với $k = 3\sqrt[3]{2} - 3$, ta có

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{x+1} + k - \frac{(9+3k)(x^2+1)}{x^2+3} = \frac{x^2\left(x+1+2\sqrt[3]{4}\right)\left(x+1-\sqrt[3]{4}\right)^2}{(x+1)(x^2+3)} \geqslant 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc a, b, c lần lượt là ba nghiệm của phương trình

$$t^3 - t^2 + \frac{2+\sqrt[3]{4}}{12}t - \frac{1}{36} = 0,$$

cụ thể

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\sqrt{2-\sqrt[3]{4}}\cos\left(\dfrac{1}{3}\arccos\sqrt{\dfrac{7-\sqrt[3]{2}}{4}}\right) \\ b = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\sqrt{2-\sqrt[3]{4}}\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{1}{3}\arccos\sqrt{\dfrac{7-\sqrt[3]{2}}{4}}\right) \\ c = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\sqrt{2-\sqrt[3]{4}}\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{3}\arccos\sqrt{\dfrac{7-\sqrt[3]{2}}{4}}\right) \end{cases} \tag{2.9}$$

cùng các hoán vị. Bài toán được chứng minh. □

Bài toán 8. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant \sqrt{9 - k + \frac{k(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}},$$

trong đó $k = 3\left(1+\sqrt[3]{2}\right)^2$.

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Chuẩn hóa $p = 1$ và áp dụng bổ đề (1.1) ta đưa bài toán về chứng minh

$$\frac{2(27q^2-9q+1)}{9q^2-2q+(1-3q)\sqrt{q(1-3q)}} + \frac{1}{q} - 6 \geqslant \sqrt{9-k+\frac{k(1-2q)}{q}}. \tag{2.10}$$

Đặt $x = \sqrt{\frac{1-3q}{q}} \geqslant 0$ thì $q = \frac{1}{x^2+3}$, bất đẳng thức (2.10) trở thành

$$\frac{2(x^2+3x+3)}{x+1} + x^2 - 3 \geqslant \sqrt{9+kx^2},$$

hay là

$$\frac{x^3+3x^2+3x+3}{x+1} \geqslant \sqrt{9+kx^2},$$

hoặc

$$(x^3+3x^2+3x+3)^2 \geqslant (9+kx^2)(x+1)^2,$$
$$x^2[x^4+6x^3+(15-k)x^2+2(12-k)x-k+18] \geqslant 0.$$

Đặt

$$P = x^4+6x^3+(15-k)x^2+2(12-k)x-k+18,$$

ta sẽ chứng minh $P \geqslant 0$. Thật vậy, với $k = 3\left(1+\sqrt[3]{2}\right)^2$ thì

$$P = \left(x+1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)\left(x+3+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)\left(x+1-\sqrt[3]{4}\right)^2 \geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc a, b, c lần lượt là ba nghiệm của phương trình

$$t^3 - t^2 + \frac{2+\sqrt[3]{4}}{12}t - \frac{1}{36} = 0.$$

Giải phương trình này ta được nghiệm (2.9). Chứng minh hoàn tất. □

Bài toán 9. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{(4\sqrt{2}-4)(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geqslant 4\sqrt{2}-2+\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

(Nguyễn Văn Huyện)

Lời giải. Chuẩn hóa $p=1$ và áp dụng bổ đề (1.1) ta đưa bài toán về chứng minh

$$\frac{2(27q^2-9q+1)}{9q^2-2q+(1-3q)\sqrt{q(1-3q)}}+\frac{1}{q}-6+\frac{(4\sqrt{2}-4)q}{1-2q} \geqslant 4\sqrt{2}-2+\frac{1-2q}{q},$$

hay là

$$\frac{2(27q^2-9q+1)}{9q^2-2q+(1-3q)\sqrt{q(1-3q)}}+\frac{(4\sqrt{2}-4)q}{1-2q} \geqslant 4\sqrt{2}+2. \tag{2.11}$$

Đặt $x=\sqrt{\frac{1-3q}{q}} \geqslant 0$ thì $q=\frac{1}{x^2+3}$, khi đó bất đẳng thức (2.11) trở thành

$$\frac{x^3+3x^2+3x+3}{x+1} \geqslant \frac{x^4+4\sqrt{2}x^2+3}{x^2+1}.$$

Xét hiệu hai vế ta được

$$\frac{x^3+3x^2+3x+3}{x+1}-\frac{x^4+4\sqrt{2}x^2+3}{x^2+1}=\frac{2x^2\left(x+1-\sqrt{2}\right)^2}{(x+1)(x^2+1)} \geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc a, b, c lần lượt là ba nghiệm của phương trình

$$t^3-t^2+\frac{3+\sqrt{2}}{14}t-\frac{2+3\sqrt{2}}{196}=0,$$

cụ thể

$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{10-6\sqrt{2}}{7}}\cos\left(\dfrac{1}{3}\arccos\sqrt{\dfrac{115-27\sqrt{2}}{196}}\right) \\ b=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{10-6\sqrt{2}}{7}}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{1}{3}\arccos\sqrt{\dfrac{115-27\sqrt{2}}{196}}\right) \\ c=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{10-6\sqrt{2}}{7}}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{3}\arccos\sqrt{\dfrac{115-27\sqrt{2}}{196}}\right) \end{cases}$$

Bài toán được chứng minh. □

Bài toán 10. *Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{5}{2}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 2(ab+bc+ca).$$

(Nguyễn Văn Huyện)

Lời giải. Chuẩn hóa $p = 1$ từ giả thiết áp dụng bổ đề (1.1) ta có

$$\frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1 - 3q)\sqrt{q(1 - 3q)}} + \frac{1}{q} - 6 \leqslant \frac{5(1 - 2q)}{2q}. \tag{2.12}$$

Đặt $x = \sqrt{\frac{1-3q}{q}} \geqslant 0$ thì $q = \frac{1}{x^2+3}$, khi đó (2.12) trở thành

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{x + 1} \leqslant \frac{5(x^2 + 1)}{2},$$

tương đương với

$$\frac{(x - 1)(3x^2 + 2x + 1)}{x + 1} \geqslant 0.$$

Suy ra $x \geqslant 1$, hay là

$$(a + b + c)^2 \geqslant 4(ab + bc + ca),$$

hoặc

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2(ab + bc + ca).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc

$$\frac{a}{\sqrt{7} - \tan\frac{\pi}{7}} = \frac{b}{\sqrt{7} - \tan\frac{2\pi}{7}} = \frac{c}{\sqrt{7} - \tan\frac{4\pi}{7}}.$$

Chứng minh hoàn tất. □

Bài toán 11. *Với $k \geqslant 0$ là một số thực cho trước và a, b, c là ba số thực dương sao cho*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = (k + 1)^2 + \frac{2}{k + 1}.$$

Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant (k^2 + 1)(ab + bc + ca).$$

(Nguyễn Văn Huyện, VMEO IV)

Lời giải. Chuẩn hóa $p = 1$ từ giả thiết áp dụng bổ đề (1.1) ta được

$$\frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1 - 3q)\sqrt{q(1 - 3q)}} + \frac{1}{q} - 6 \leqslant (k + 1)^2 + \frac{2}{k + 1}. \tag{2.13}$$

Đặt $x = \sqrt{\frac{1-3q}{q}} \geqslant 0$ thì $q = \frac{1}{x^2+3}$, khi đó (2.13) trở thành

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{x + 1} \leqslant (k + 1)^2 + \frac{2}{k + 1},$$

hay

$$(x + 1)^2 + \frac{2}{x + 1} \leqslant (k + 1)^2 + \frac{2}{k + 1},$$

tương đương với

$$\frac{(x-k)\big[(k+1)x^2+(k^2+4k+3)x+k^2+3k\big]}{(x+1)(k+1)} \leqslant 0.$$

Suy ra $x \leqslant k$ hay là

$$(a+b+c)^2 \leqslant (k^2+3)(ab+bc+ca),$$

hoặc

$$a^2+b^2+c^2 \leqslant (k^2+1)(ab+bc+ca).$$

Bài toán được chứng minh. □

Nhận xét. Trường hợp $k=1$ ta được bài toán rất đẹp sau :

Nếu $a,\ b,\ c$ là ba số thực dương thỏa mãn

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=5,$$

thì

$$a^2+b^2+c^2 \leqslant 2(ab+bc+ca).$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

3. Các bài toán rèn luyện

Để kết thúc chuyên đề xin được giới thiệu một số bài tập để bạn đọc tự luyện

Bài tập 3.1. Cho $a,\ b,\ c$ là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^3+\frac{525(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geqslant \frac{775}{2}.$$

(Nguyễn Văn Huyện)

Bài tập 3.2. Chứng minh rằng với mọi số thực $k \geqslant 12$ ta luôn có

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{k(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \geqslant 4+2\sqrt{k-12},$$

trong đó $a,\ b,\ c$ là ba số thực dương thay đổi bất kỳ.

(Tạ Hồng Quảng)

Bài tập 3.3. Cho $a,\ b,\ c$ là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant \sqrt{\frac{k(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}+9-\frac{k}{3}},$$

trong đó $k=54\sqrt[3]{2}$.

(Bách Ngọc Thành Công)

Bài tập 3.4. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant \sqrt{9+k-\frac{k(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}},$$

luôn đúng với mọi số thực dương a, b, c.

Bài tập 3.5. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+k \geqslant \sqrt{\frac{k^2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}}+3,$$

luôn đúng với mọi số thực dương a, b, c bất kỳ.

Bài tập 3.6. Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+2\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}}.$$

Bài tập 3.7. Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{k(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca} \geqslant 3+\frac{k}{2},$$

trong đó $k=2\left(3\sqrt[3]{9}-1\right)$.

(Nguyễn Văn Huyện)

Bài tập 3.8. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+k \geqslant \sqrt{\frac{3k^2(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}}+3,$$

luôn đúng với mọi số thực dương a, b, c bất kỳ.

(Phạm Sinh Tân)

Bài tập 3.9. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+k\left(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\right)^2 \geqslant 3+k,$$

luôn đúng với mọi số thực dương a, b, c bất kỳ.

Bài tập 3.10. Với $k \geqslant 1$ là một số thực cho trước và a, b, c là ba số thực dương sao cho

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{(k^2+9)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}.$$

Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2 \leqslant (k^2+1)(ab+bc+ca).$$

(Nguyễn Văn Huyện)

Tài liệu tham khảo

[1] Võ Quốc Bá Cẩn, *Chuyên Đề Bất Đẳng Thức Hiện Đại*, 2008.

[2] Diễn đàn toán học: `http://diendantoanhoc.net`

[3] Art of Problem Solving: `http://artofproblemsolving.com`