VỀ BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC TRONG KỲ THI British Mathematical Olympiad 1986

Nguyễn Văn Huyện

SV trường Đại học Giao Thông Vận Tải Tp.HCM

nguyenhuyen_ag@yahoo.com

1. Nội dung bài viết

Trong kỳ thi vô địch toán của nước Anh năm 1986 có một bài toán bất đẳng thức khá thú vị sau đây

Bài Toán 1. *Với* a,b,c *là ba số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây*

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a^2+b^2+c^2=6 \end{cases}$$

Chứng minh bất đẳng thức $a^2b+b^2c+c^2a\le 6.$

(British Mathematical Olympiad 1986)

Có thể nói đây là một bất đẳng thức rất khó vì dấu đẳng thức của bài toán không tại tâm hoặc tại biên mà tại $a=2\cos\frac{2\pi}{9}$, $b=2\cos\frac{4\pi}{9}$, $c=2\cos\frac{8\pi}{9}$ cùng các hoán vị, và chính vì dấu bằng "kỳ lạ" này mà bài toán đã gây được khó khăn cho các phương pháp mà ta đã biết thậm thậm chí là các phương pháp rất mạnh như S.O.S hay dồn biến, …. Trong quyển sách "*Sử dụng phương pháp Cauchy-Schwarz để chứng minh bất đẳng thức*" anh Võ Quốc Bá Cẩn có đưa ra một lời giải rất độc đáo bằng Cauchy-Schwarz như sau

Lời Giải. Từ giả thiết của bài toán ta dễ dàng suy ra được $ab+bc+ca=-3$. Sử dụng hằng đẳng thức

$$3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)=a\left(2ab+c^2\right)+b\left(2bc+a^2\right)+c\left(2ca+b^2\right), \qquad (1)$$

kết hợp với bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$9VT^2\le\left(a^2+b^2+c^2\right)\left[\left(2ab+c^2\right)^2+\left(2bc+a^2\right)^2+\left(2ca+b^2\right)^2\right].$$

Mặt khác, dễ dàng tính được

$$\begin{aligned}\sum\left(2ab+c^2\right)^2 &= 4\left(a^2b^2+a^2b^2+a^2b^2\right)+abc\left(a+b+c\right)+a^2+b^2+c^2\\ &= 2\left(ab+bc+ca\right)+\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\\ &= 54\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $a^2b+b^2c+c^2a\le 6.$ □

Có thể nói mấu chốt của lời giải này chính là việc sử dụng đẳng thức được (1) để sau đó sử dụng thành công bất đẳng thức Cauchy-Schwarz. Trong sách anh Cẩn cũng đã lí giải việc tìm ra (1) bằng cách sử dụng phương pháp nhân tử Langrange (sẽ được học trong chương trình toán cao cấp của bậc đại học) như sau. Bằng cách đặt

$$F\left(a,b,c\right)=a^2b+b^2c+c^2a+\lambda_1\left(a+b+c\right)+\lambda_2\left(a^2+b^2+c^2-6\right).$$

Ta thấy điểm cực trị của hàm $F\left(a,b,c\right)$ là nghiệm của hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial a}=\dfrac{\partial F}{\partial b}=\dfrac{\partial F}{\partial c}=0\\ a+b+c=0\\ a^2+b^2+c^2=6\end{cases}$$

hay là

$$\begin{cases}2ab+c^2+\lambda_1+2\lambda_2 a=0\\ 2bc+a^2+\lambda_1+2\lambda_2 b=0\\ 2ca+b^2+\lambda_1+2\lambda_2 c=0\\ a+b+c=0\\ a^2+b^2+c^2=6\end{cases}\qquad (2)$$

Cộng tương ứng theo vế các phương trình thứ nhất, thứ hai, thứ ba lại với nhau ta được

$$\left(a+b+c\right)^2+3\lambda_1+2\lambda_2\left(a+b+c\right)=0,$$

Từ đó suy ra $\lambda_1 = 0$, vì thế hệ (2) lúc này trở thành

$$\begin{cases} 2ab + c^2 + 2\lambda_2 a = 0 \\ 2bc + a^2 + 2\lambda_2 b = 0 \\ 2ca + b^2 + 2\lambda_2 c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 6 \end{cases}$$

Từ ba phương trình đầu, ta rút ra được

$$\frac{2ab + c^2}{a} = \frac{2bc + a^2}{b} = \frac{2ca + b^2}{c} = -2\lambda_2.$$

Để ý rằng đẳng thức trên chính là điều kiện xảy ra dấu đẳng thức của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và vì thế mà ta có lời giải độc đáo như đã trình bày ở phần trên.

Không dừng lại ở đây, bằng kỹ thuật tương tự như trên chúng ta ta có thể giải quyết trọn vẹn được bài toán tổng quát của bất đẳng thức trên như sau.

Tổng Quát. *Với a, b, c là ba số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau*

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 6t^2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng khi đó với mọi số thực k, t ta luôn có bất đẳng thức sau đây

$$a^2b + b^2c + c^2a + kabc \le 2t^3\sqrt{k^2 - 3k + 9}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn, Lê Việt Hải)

Lời Giải. Từ giả thiết của bài toán, ta dễ dàng tính được

$$\begin{cases} ab + bc + ca = -3t^2 \\ a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 9t^4 \end{cases}$$

Mặt khác, ta lại có

$$a^3b + b^3c + c^3a - \left(ab^3 + bc^3 + ca^3\right) = -\left(a + b + c\right)\left(a - b\right)\left(b - c\right)\left(c - a\right) = 0.$$

Từ đó suy ra $a^3b+b^3c+c^3a=ab^3+bc^3+ca^3$, vì thế

$$\begin{aligned}a^3b+b^3c+c^3a&=\frac{ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right)}{2}\\&=\frac{ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right)+abc\left(a+b+c\right)}{2}\\&=\frac{\left(ab+bc+ca\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2}=-9t^4.\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}9VT^2&=\left[3\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+3kabc-k\cdot\frac{\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)}{3}\right]^2\\&=\left[\sum a\left(2ab+c^2+kbc-k\cdot\frac{ab+bc+ca}{3}\right)\right]^2\\&\le\left(a^2+b^2+c^2\right)\left[\sum\left(2ab+c^2+kbc-k\cdot\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^2\right].\end{aligned}$$

Bằng tính toán trực tiếp, ta dễ dàng tìm được

$$\begin{aligned}\sum\left(2ab+c^2+kbc-k\cdot\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^2&=\sum\left(2ab+c^2+kbc+kt^2\right)^2\\&=6t^4\left(k^2-3k+9\right).\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$a^2b+b^2c+c^2a+kabc\le 2t^3\sqrt{k^2-3k+9}.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Nhận Xét. Ngoài ra để tính được $a^3b+b^3c+c^3a=-9t^4$ ta có thể sử dụng hằng đẳng thức sau đây

$$\left(a+b+c\right)\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)=0$$

Những bài toán bất đẳng thức khó, hình thức đơn giản, đẹp mắt và có dấu đẳng thức xảy ra khi các biến lệch nhau (lệch tâm hay lệch biên) thường không có nhiều, vì để xây dựng được những bài toán như vậy đòi hỏi người ra đề phải có một trình độ lão luyện. Chắc hẳn mỗi chúng ta ai cũng đã từng đôi lần chạm trán với những bài toán như vậy mà cũng không ít lần bị nó đánh gục. Chúng ta có thể nêu ra đây một bài toán đại diện cho những tiêu chuẩn nói trên, một bất đẳng thức rất nổi tiếng của giáo sư Vasile Cirtoaje

Bài toán 2. *Nếu* a,b,c *là ba số thực tùy ý, thì*

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \geq 3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right).$$

(Vasile Cirtoaje)

Ẩn bên trong vẻ bề ngoài đơn giản này là một bất đẳng thức rất khó vì ngoài trường hợp tầm thường $a=b=c$ để đẳng thức xảy ra thì vẫn còn một trường hợp nữa đặc biệt nữa là $(a,b,c)=k\left(\sin^2\frac{\pi}{7},\ \sin^2\frac{2\pi}{7},\ \sin^2\frac{4\pi}{7}\right)$ cùng các hoán vị.

Lại là dấu đẳng thức lượng giác ?! Chính vì thế mà một lời giải bình thường cho bất đẳng thức có dấu bằng "bất thường" này dường như là không có ! Những chứng minh cho bài toán này đa phần đều đưa bài toán về dạng tổng các bình phương điều này đòi hỏi người làm toán phải có một nhãn quan nhạy bén để nhận biết được sự tồn tại của các phép phân tích đó. Mãi sau này mới xuất hiện một chứng minh khá đơn giản và độc đáo bằng phép thế trong bất đẳng thức quen thuộc

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx). \qquad (x,y,z\in\mathbb{R})$$

Trên diễn đàn toán học toàn cầu www.Mathlinks.ro anh can_hang2007 có từng nói rằng bất đẳng thức sau đây của có thể chứng minh được bằng Cauchy-Schwarz nhưng chưa công bố lời giải. Bằng bài toán tổng quát trên chúng ta có một lời giải bằng AM-GM kết hợp với Cauchy-Schwarz khá thú vị sau đây cho bất đẳng thức Vasile Cirtoaje.

Lời Giải. Vì bất đẳng thức đã cho ở dạng thuần nhất nên ta có thể chuẩn hóa cho $a+b+c=3,$ khi đó tồn tại số thực t sao cho $a^2+b^2+c^2=3+6t^2$. Tiếp đến, ta đặt $a=1+x, b=1+y, c=1+z$ thì $x+y+z=0$ và tính được

$$x^2+y^2+z^2=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=6t^2.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$3\left(1+2t^2\right)^2 \geq a^3b+b^3c+c^3a.$$

Ta lại có

$$\begin{aligned}
a^3b+b^3c+c^3a &= (1+x)^3(1+y)+(1+y)^3(1+z)+(1+z)^3(1+x) \\
&= \sum\left(x^3+3x^2y+3xy+x^3y+3x^2+1\right) \\
&= x^3+y^3+z^3+3\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)+3\left(\sum x^2+\sum yz\right)+\sum x^3y+3 \\
&= 3xyz+3\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)+9t^2-9t^4+3 \\
&= 3\left(x^2y+y^2z+z^2x+xyz\right)+9t^2-9t^4+3 \\
&\leq 3\cdot 2t^3\sqrt{7}+9t^2-9t^4+3.
\end{aligned}$$

Vậy ta cần chứng minh

$$\left(1+2t^2\right)^2 \geq 2t^3\sqrt{7}+3t^2-3t^4+1,$$

hay là

$$7t^4+t^2 \geq 2t^3\sqrt{7}.$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM cho hai số không âm nên ta có điều phải chứng minh.

2. Tài liệu tham khảo

[1] Võ Quốc Bá Cẩn, *Sử dụng phương pháp Cauchy-Schwarz để chứng minh bất đẳng thức*, nhà xuất bản đại học Sư phạm, 2010.

[2] Câu lạc bộ toán trường PTNK thành phố Hồ Chí Minh, Lê Việt Hải *Phương pháp nhân tử Langrange và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, 2011*.

Thành phố Hồ Chí Minh

00h03’ tối ngày 05/05/2012