VỀ MỘT BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC

Nguyễn Văn Huyện

Sinh viên CN10B trường Đại học Giao Thông Vận Tải Tp.HCM
nguyenhuyen_ag@yahoo.com

1 Lời nói đầu

Bất đẳng thức không thuần nhất là một phần quan trọng, hay và tương đối khó trong bất đẳng thức vì chúng ta không có một phương pháp thực sự "tốt" nào để giải quyết loạt các bài toán dạng này. Những lời giải cho những bất đẳng thức dạng này thường mang những ý tưởng khá hay, độc đáo và thường là những phương pháp không mẫu mực. Ở bài viết này tác giả xin được giới thiệu đến bạn đọc một bài toán bất đẳng thức không thuần nhất tương đối đơn giản nhưng lại có rất nhiều ứng dụng trong việc giải quyết các bất đẳng thức thuần nhất và không thuần nhất khác, thậm chí là những bất đẳng thức trong các đề thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế.
(Bài viết được trích ra từ bài viết cùng tên của tác giả đăng trong chuyên đề Toán học số 9 của trường Phổ Thông Năng Khiếu Đại học Quốc gia Tp.HCM và được tác giả bổ sung, điều chỉnh.)

2 Nội dung

Bài toán gốc. *Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi bất kỳ. Chứng minh rằng*

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca). \tag{1}$$

Lời Giải 1. Ta sẽ sử dụng phương pháp tam thức bậc hai để chứng minh bài toán. Bất đẳng thức được chuyển về dạng tam thức bậc hai như sau

$$f(a) = a^2 + 2a(bc - b - c) + (b - c)^2 + 1 \geq 0.$$

- Nếu $bc \geq b + c$ thì ta sẽ có ngay điều phải chứng minh.
- Xét trường hợp ngược lại $bc \leq b + c$, và điều này tương đương với $(b - 1)(c - 1) \leq 1$. Khi đó ta tính được biệt thức Δ' của $f(a)$ là

$$\begin{aligned}\Delta' &= (bc - b - c)^2 - (b - c)^2 - 1\\ &= bc(b - 2)(c - 2) - 1.\end{aligned}$$

Ta xét hai trường hợp
Trường hợp 1: Có đúng một trong hai số b, c lớn hơn 2, số còn lại không lớn hơn 2. Trong trường hợp này ta có $(b - 2)(c - 2) \leq 0$, và từ đó suy ra $\Delta' \leq 0$.
Trường hợp 2: Cả hai số b, c đều không lớn hơn 2. Khi đó theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\Delta' = bc(2 - b)(2 - c) - 1 \leq \left[\frac{b + c + (2 - b) + (2 - c)}{4}\right]^4 - 1 = 0.$$

Tóm lại trong mọi trường hợp ta điều có $\Delta' \leq 0$. Tức $f(a) \geq 0$ và đây chính là điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Lời Giải 2. Theo nguyên lý Dirichlet, ta thấy rằng trong ba số a, b, c sẽ có hai số hoặc cùng ≥ 1 hoặc cùng ≤ 1. Giả sử hai số đó là a, b khi đó

$$(a - 1)(b - 1) \geq 0.$$

Từ đây, bằng cách sử dụng hằng đẳng thức

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1-2(ab+bc+ca)=(a-b)^2+(c-1)^2+2c(a-1)(b-1)\geq 0,$$

ta thu được ngay bất đẳng thức (1). Phép chứng minh hoàn tất. □

Lời Giải 3. Ta sẽ sử dụng phương pháp dồn biến để chứng minh bài toán. Giả sử $c=\min\{a,\ b,\ c\}$ và đặt

$$f(a,\ b,\ c)=a^2+b^2+c^2+2abc+1-2(ab+bc+ca),$$

ta có

$$f(a,\ b,\ c)-f\left(\sqrt{ab},\ \sqrt{ab},\ c\right)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left(a+b+2\sqrt{ab}-2c\right)\geq 0.$$

Do đó $f(a,\ b,\ c)\geq f\left(\sqrt{ab},\ \sqrt{ab},\ c\right)$. Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$f\left(\sqrt{ab},\ \sqrt{ab},\ c\right)\geq 0.$$

Thật vậy, nếu đặt $t=\sqrt{ab}$ thì ta có

$$f(t,\ t,\ c)=2t^2+c^2+2t^2c-2(t^2+2tc)+1=(c-1)^2+2c(t-1)^2\geq 0.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Lời Giải 4. Sử dụng lần lượt bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$2abc+1=abc+abc+1\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\geq \frac{9abc}{a+b+c}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{a+b+c}\geq 2(ab+bc+ca).$$

Thực hiện phép khai triển trực tiếp, ta có bất đẳng thức tương đương với

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a),$$

đúng vì đây chính là bất đẳng thức Schur dạng bậc ba nên ta có điều phải chứng minh. □

Bất đẳng thức (1) được Darij Grinberg đề xuất trên diễn đàn toán học Mathlinks.ro vào năm 2004. Mặc dù chỉ là một kết quả đơn giản nhưng bất đẳng thức này lại có nhiều ứng dụng trong việc chứng minh các bất đẳng thức ba biến. Sau đây, chúng ta sẽ đi vào xét các bài toán cụ thể để hiểu rõ vì sao chúng tôi lại nói như vậy.

Bài toán 1.1. *Cho $a,\ b,\ c$ là các số dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$a^2+b^2+c^2+a+b+c\geq 2(ab+bc+ca). \tag{1.1.1}$$

(Moscow Mathematical Olympiad 2000).

Lời Giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3=2abc+1.$$

Vì thế để chứng minh bài toán, ta chỉ cần chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\geq 2(ab+bc+ca).$$

Đây chính là bất đẳng thức (1) nên ta có ngay điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Bài toán 1.2. *Tìm hằng số k lớn nhất để bất đẳng thức*

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3k \geq (k+1)(a+b+c)$$

luôn đúng với mọi a, b, c dương thỏa mãn $abc = 1$.

(Việt Nam Mathematical Olympiad 2006).

Lời Giải. Cho $a = b = t$ ($t > 0$, $t \neq 1$) và $c = \frac{1}{t^2}$, khi đó a, b, c là các số dương và $abc = 1$. Do đó, theo yêu cầu của bài toán ta phải có

$$\frac{2}{t^2} + t^4 + 3k \geq (k+1)\left(2t + \frac{1}{t^2}\right).$$

Bất đẳng thức này tương đương với mỗi bất đẳng thức trong dãy các bất đẳng thức sau đây

$$\frac{2}{t^2} + t^4 - 3 \geq (k+1)\left(2t + \frac{1}{t^2} - 3\right),$$

$$\frac{t^6 - 3t^2 + 2}{t^2} \geq \frac{(k+1)(2t^3 - 3t^2 + 1)}{t^2},$$

$$\frac{(t^2-1)^2(t^2+2)}{t^2} \geq \frac{(k+1)(t-1)^2(2t+1)}{t^2},$$

$$\frac{(t+1)^2(t^2+2)}{2t+1} \geq k+1, \quad \forall t > 0.$$

Cho $t \to 0^+$, ta được $2 \geq k+1$, suy ra $k \leq 1$. Ta sẽ chứng minh rằng 1 chính là hằng số cần tìm, tức là

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \geq 2(a+b+c).$$

Đặt $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ thì ta có $xyz = 1$, $3 = 2xyz + 1$ và

$$a + b + c = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xyz}{x} + \frac{xyz}{y} + \frac{xyz}{z} = xy + yz + zx.$$

Do đó bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz + 1 \geq 2(xy + yz + zx),$$

hiển nhiên đúng theo (1). Vậy ta có kết luận $k_{\max} = 1$. □

Bài toán 1.3. *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện*

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 1.$$

Chứng minh rằng

$$ab + bc + ca \leq \frac{3}{4}.$$

(Mircea Lascu, Romania Junior Team Selecsion Test 2005).

Lời Giải. Đặt $x = a + b$, $y = b + c$, $z = c + a$ thì ta có $xyz = 1$ và

$$a = \frac{z + x - y}{2}, \quad b = \frac{x + y - z}{2}, \quad c = \frac{y + z - x}{2}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại như sau

$$\frac{z+x-y}{2} \cdot \frac{x+y-z}{2} + \frac{x+y-z}{2} \cdot \frac{y+z-x}{2} + \frac{y+z-x}{2} \cdot \frac{z+x-y}{2} \leq \frac{3}{4}.$$

Sau khi thu gọn, ta được

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(xy + yz + zx),$$

hay là

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz + 1 \geq 2(xy + yz + zx).$$

Đây chính là bất đẳng thức (1) nên ta có điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$. □

Bài toán 1.4. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c, ta đều có*

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 3 \geq (a + 1)(b + 1)(c + 1).$$

(Gabriel Dospinescu, Marian Tetiva, Mircea Lascu).

Lời Giải. Sau khi khai triển và rút gọn, ta có bất đẳng thức tương đương

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc + 2 \geq ab + bc + ca + a + b + c,$$

hay là

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + 2abc + 4 \geq 2(ab + bc + ca + a + b + c).$$

Theo bất đẳng thức (1), ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca).$$

Sử dụng đánh giá này, ta đưa được bài toán về chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c).$$

Bất đẳng thức này tương đương với bất đẳng thức hiển nhiên đúng là

$$(a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \geq 0.$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Bài toán 1.5. *Chứng minh bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi số thực dương a, b, c bất kỳ*

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca). \tag{1.5.1}$$

(Asian Pacific Mathematical Olympiad 2004).

Lời Giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2b^2c^2 + 3(a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2) + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3) + 2 \geq 9(ab + bc + ca).$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = 3\left(\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{c^2 + a^2}{2}\right) \geq 3(ab + bc + ca)$$

và

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3)=2\left[(a^2b^2+1)+(b^2c^2+1)+(c^2a^2+1)\right]\ge 4(ab+bc+ca).$$

Từ đó bài toán được quy về chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+2\ge 2(ab+bc+ca). \tag{1.5.1}$$

Bất đẳng thức này có thể được viết lại thành

$$\left[a^2+b^2+c^2+2abc+1-2(ab+bc+ca)\right]+(abc-1)^2\ge 0,$$

hiển nhiên đúng theo (1). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Nhận Xét. Bài toán còn đúng cả trong trường hợp a, b, c là các số thực bất kỳ. Thật vậy, từ chứng minh trên ta thấy rằng

$$\begin{aligned}(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)&=(|a|^2+2)(|b|^2+2)(|c|^2+2)\ge 9(|a||b|+|b||c|+|c||a|)\\&\ge 9(ab+bc+ca).\end{aligned}$$

Bài toán 1.6. *Chứng minh bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi số thực dương a, b, c bất kỳ*

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 3(a+b+c)^2. \tag{1.6.1}$$

(Crux Mathematicorum).

Lời Giải. Tương tự như trên, ta cũng sử dụng phép khai triển trực tiếp và viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$a^2b^2c^2+a^2+b^2+c^2+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3)+2\ge 6(ab+bc+ca).$$

Đến đây, ta cũng sử dụng bất đẳng thức AM-GM để thu được

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3)\ge 4(ab+bc+ca),$$

và từ đó đưa được bất đẳng thức về chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+2\ge 2(ab+bc+ca).$$

Đây chính là bất đẳng thức (1.5.1) đã được chứng minh ở phần trên. Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. □

Nhận Xét. Vì $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$, nên từ bài toán này ta có thể dễ dàng suy ra

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca).$$

Vậy bài toán này chính là một kết quả mạnh hơn của bất đẳng thức Asian Pacific Mathematical Olypiad 2004. Ngoài ra ta còn có thể làm chặt bất đẳng thức này hơn nữa, ta cùng xét bài toán sau đây.

Bài toán 1.7. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 3(a+b+c)^2+(abc-1)^2.$$

(Nguyễn Đình Thi).

Lời Giải. Sau khi khai triển và rút gọn, ta được bất đẳng thức tương đương

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3)+a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 6(ab+bc+ca).$$

Theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3) \geq 4(ab+bc+ca).$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 2(ab+bc+ca).$$

Đây chính là bất đẳng thức (1).
Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Bài toán 1.8. *Với mọi số thực dương a, b, c và $k \geq 2$ là một số thực bất kỳ, khi đó ta luôn có bất đẳng thức*

$$(a^2+k)(b^2+k)(c^2+k) \geq \frac{(k+1)^2}{3}(a+b+c)^2+k^3-3k-2. \tag{1.8.1}$$

(Nguyễn Văn Huyện).

Lời Giải. Ta cũng thực hiện phép khai triển và viết bất đẳng thức trên thành

$$a^2b^2c^2+k(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+k^2(a^2+b^2+c^2)+3k+2 \geq \frac{(k+1)^2}{3}(a+b+c)^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức (1.5.1), ta được

$$a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+2) \geq a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2,$$

từ đó chỉ cần chứng minh được

$$k(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+(k^2-2)(a^2+b^2+c^2)+3k \geq \frac{k^2+2k-2}{3}(a+b+c)^2.$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, thì

$$(a^2b^2+1)+(b^2c^2+1)+(c^2a^2+1) \geq 2(ab+bc+ca).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} k(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+(k^2-2)(a^2+b^2+c^2)+3k &\geq 2k(ab+bc+ca)+(k^2-2)(a^2+b^2+c^2) \\ &= (k^2-k-2)(a^2+b^2+c^2)+k(a+b+c)^2 \\ &\geq \frac{k^2-k-2}{3}(a+b+c)^2+k(a+b+c)^2 \\ &= \frac{k^2+2k-2}{3}(a+b+c)^2. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Nhận Xét. Trong (1.8.1) nếu cho $k=2$, thì ta thu được (1.6.1).

Bài toán 1.9. *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng*

$$a+b+c \leq 3.$$

(Iran Mathematical Olympiad 2002).

Lời Giải. Từ giả thiết sử dụng bất đẳng thức (1), ta có

$$\begin{aligned}9 = 2(a^2+b^2+c^2+abc)+1 &= a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2+c^2+2abc+1)\\ &\ge a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\\ &= (a+b+c)^2,\end{aligned}$$

Vì a, b, c là các số dương nên sau khi lấy căn hai vế, ta được

$$a+b+c \le 3.$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Bài toán 1.10. *Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$a^2+b^2+c^2+abc \ge 4 \tag{1.10.1}$$

(Mathematical Reflections 4/2006).

Lời Giải. Nhân 2 vào hai vế của bất đẳng thức, ta được

$$2(a^2+b^2+c^2)+2abc \ge 8.$$

Bây giờ bằng cách sử dụng bất đẳng thức (1), ta có

$$\begin{aligned}2(a^2+b^2+c^2)+2abc &= [a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2+c^2+2abc+1)]-1\\ &\ge [a^2+b^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)]-1\\ &= (a+b+c)^2-1\\ &= 8.\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □.

Bài toán 1.11. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức*

$$a^2+b^2+c^2+abc+5 \ge 3(a+b+c). \tag{1.11.1}$$

(Nguyễn Văn Huyện).

Lời Giải. Nhân 2 và hai vế của bất đẳng thức, ta được

$$2(a^2+b^2+c^2)+2abc+10 \ge 6(a+b+c).$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với mỗi bất đẳng thức sau đây

$$[a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)]+a^2+b^2+c^2+2abc+10 \ge 6(a+b+c)+2(ab+bc+ca),$$

$$(a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2+2abc+10 \ge 6(a+b+c)+2(ab+bc+ca),$$

$$[(a+b+c)^2-6(a+b+c)+9]+a^2+b^2+c^2+2abc+1 \ge 2(ab+bc+ca),$$

$$(a+b+c-3)^2+[a^2+b^2+c^2+2abc+1-2(ab+bc+ca)] \ge 0.$$

Là kết quả hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức (1) nên ta có điều phải chứng minh.
Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. □

Nhận Xét. Từ bài này nếu cho $a+b+c=3$, ta sẽ nhận được "**Bài toán 1.10**", còn nếu ta cho $a^2+b^2+c^2+abc=4$ thì ta sẽ nhận được "**Bài toán 1.9**".

Bài toán 1.12. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, ta luôn có*

$$abc+2(a^2+b^2+c^2)+8 \ge 5(a+b+c). \tag{1.12.1}$$

(Trần Nam Dũng, Hello IMO 2007, Toán Học và Tuổi Trẻ).

LỜI GIẢI 1. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a+b+c = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot (a+b+c) \le \frac{1}{6}\left[9+(a+b+c)^2\right].$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$12(a^2+b^2+c^2)+6abc+48 \ge 5\left[(a+b+c)^2+9\right].$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$7(a^2+b^2+c^2)+6abc+3 \ge 10(ab+bc+ca),$$

$$4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3\left[a^2+b^2+c^2+2abc+1-2(ab+bc+ca)\right] \ge 0,$$

đúng vì ta có $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$ (theo AM-GM) và

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \ge 2(ab+bc+ca) \text{ (theo (1))}.$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

LỜI GIẢI 2. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+[a^2+b^2+c^2+abc+5-3(a+b+c)] \ge 0,$$

là một kết quả hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức (1.11.1), nên ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 1.13. *Cho x, y, z là ba số thực không âm thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx=3$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{x^2+2}+\frac{1}{y^2+2}+\frac{1}{z^2+2} \le 1.$$

(Algebraic Inequalities Old and New Methods).

LỜI GIẢI. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(x^2+2)(y^2+2)(z^2+2) \ge (x^2+2)(y^2+2)+(y^2+2)(z^2+2)+(z^2+2)(x^2+2).$$

Khai triển trực tiếp ra, ta được

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2z^2 \ge 4.$$

Đặt $a=xy, b=yz$ và $c=zx$ thì $a+b+c=3$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$a^2+b^2+c^2+abc \ge 4.$$

Đây chính là bất đẳng thức (1.10.1), nên nó hiển nhiên đúng. Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$, tức là $x=y=z=1$. □

Bài toán 1.14. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức*

$$(x^2+3)(y^2+3)(z^2+3) \ge \frac{4}{3}\left(xy+yz+zx+\frac{xyz}{3}\right)^2$$

LỜI GIẢI. Chia hai vế của bất đẳng thức cho $x^2y^2z^2$, ta có thể viết nó lại như sau

$$\left(\frac{9}{x^2}+3\right)\left(\frac{9}{y^2}+3\right)\left(\frac{9}{z^2}+3\right) \ge 4\left(\frac{3}{x}+\frac{3}{y}+\frac{3}{z}+1\right)^2.$$

Đến đây bằng cách đặt $a = \frac{3}{x}, b = \frac{3}{y}$ và $c = \frac{3}{z}$, ta đưa bài toán về chứng minh

$$(a^2+3)(b^2+3)(c^2+3) \geq 4(a+b+c+1)^2. \tag{1.14.1}$$

Khai triển trực tiếp bất đẳng thức này, ta được

$$5(a^2+b^2+c^2)+3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+a^2b^2c^2+23 \geq 8(a+b+c+ab+bc+ca).$$

Theo bất đẳng thức (1.5.1) thì

$$a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+2 \geq 2(ab+bc+ca),$$

vì thế để chứng minh được bài toán ta cần chứng minh được

$$4(a^2+b^2+c^2)+3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+21 \geq 8(a+b+c)+6(ab+bc+ca).$$

Bằng một số biến đổi đơn giản ta có bất đẳng thức này tương đương với

$$3\left[(ab-1)^2+(bc-1)^2+(ca-1)^2\right]+4\left[(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right] \geq 0,$$

là một bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hay $x=y=z=3$. □

Bài toán 1.15. *Với a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng khi đó với mọi số dương $k \geq 2$, ta luôn có*

$$(a^2+k)(b^2+k)(c^2+k) \geq (k+1)(a+b+c+k-2)^2. \tag{1.15.1}$$

(Nguyễn Văn Huyện).

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức (1.8.1), ta cần chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$\frac{(k+1)^2}{3}(a+b+c)^2+k^3-3k-2 \geq (k+1)(a+b+c+k-2)^2.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\begin{aligned}
\frac{(k+1)^2}{3}(a+b+c)^2+(k+1)^3-3(k+1)^2 &\geq (k+1)(a+b+c+k-2)^2,\\
\frac{k+1}{3}(a+b+c)^2+(k+1)^2-3(k+1) &\geq (a+b+c+k-2)^2,\\
\frac{k+1}{3}(a+b+c)^2+(k+1)^2-3(k+1) &\geq (a+b+c+k-2)^2,\\
\frac{k+1}{3}(a+b+c)^2+k^2-k-2 &\geq (a+b+c)^2+2(k-2)(a+b+c)+(k-2)^2,\\
\frac{k-2}{3}(a+b+c)^2+3(k-2) &\geq 2(k-2)(a+b+c).
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo bất đẳng thức AM-GM nên ta có điều phải chứng minh. □

NHẬN XÉT. Trong (1.15.1) nếu ta cho $k=2$ thì ta được (1.6.1) còn nếu ta cho $k=3$ thì ta được (1.14.1).

Bài toán 1.16. *Với a, b, c là ba số thực bất kỳ sao cho*

$$\frac{1}{a^2+8}+\frac{1}{b^2+8}+\frac{1}{c^2+8}=\frac{1}{3}$$

hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=a+b+c.$$

(Nguyễn Đình Thi).

Lời Giải. Ta viết biểu thức điều kiện của bài toán lại như sau

$$\frac{1}{a^2+8} = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{b^2+8}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{c^2+8}\right),$$

hay là

$$\frac{1}{a^2+8} = \frac{1}{6}\left(\frac{b^2+2}{b^2+8} + \frac{c^2+2}{c^2+8}\right).$$

Từ đó theo bất đẳng thức AM-GM, ta được

$$\frac{1}{a^2+8} = \frac{1}{6}\left(\frac{b^2+2}{b^2+8} + \frac{c^2+2}{c^2+8}\right) \geq \frac{1}{3}\sqrt{\frac{(b^2+2)(c^2+2)}{(b^2+8)(c^2+8)}}. \tag{1.16.1}$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\frac{1}{b^2+8} \geq \frac{1}{3}\sqrt{\frac{(c^2+2)(a^2+2)}{(c^2+8)(a^2+8)}}, \tag{1.16.2}$$

$$\frac{1}{c^2+8} \geq \frac{1}{3}\sqrt{\frac{(a^2+2)(b^2+2)}{(a^2+8)(b^2+8)}}. \tag{1.16.3}$$

Nhân tương ứng ba bất đẳng thức $(1.16.1), (1.16.2)$ và $(1.16.3)$ lại với nhau ta được

$$27 \geq (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2).$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức (1.6.1) thì

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 3(a+b+c)^2.$$

Nên từ đó suy ra

$$(a+b+c)^2 \leq 9$$

hay là

$$-3 \leq a+b+c \leq 3 \tag{1.16.4}$$

Bằng tính toán trực tiếp ta thấy $P = -3$ khi và chỉ khi (a,b,c) bằng $(-1,-1,-1)$ và $P = 3$ khi và chỉ khi (a,b,c) bằng $(1,1,1)$.

Việc tìm được các giá trị cụ thể của a, b, c thỏa mãn giả thiết của bài toán đồng thời bất đẳng thức (1.16.4) trở thành đẳng thức cho phép ta kết luận $P_{\min} = -3$ và $P_{\max} = 3$. □

Nhận Xét. Ta có bài toán tổng quát của bất đẳng thức trên như sau

Cho a, b, c là ba số thực bất kỳ và $k \geq 2$ là một số dương cho trước thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{a^2+3k+2} + \frac{1}{b^2+3k+2} + \frac{1}{c^2+3k+2} = \frac{1}{k+1}$$

khi đó hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a+b+c.$$

(Nguyễn Văn Huyện).

Lời Giải. Tương tự như trên ta viết biểu thức điều kiện của bài toán lại như sau

$$\frac{1}{a^2+3k+2} = \frac{1}{2(k+1)}\left(\frac{b^2+k}{b^2+3k+2} + \frac{c^2+k}{c^2+3k+2}\right).$$

Từ đó sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta được

$$\frac{1}{a^2+3k+2} \ge \frac{1}{k+1}\sqrt{\frac{(b^2+k)(c^2+k)}{(b^2+3k+2)(c^2+3k+2)}}.$$

Đánh giá tương tự cho hai bất đẳng thức còn lại sau đó nhân tương ứng theo vế lại với nhau, ta thu được

$$(k+1)^3 \ge (a^2+k)(b^2+k)(c^2+k).$$

Kết hợp với bất đẳng thức (1.8.1), ta có

$$(k+1)^3 \ge \frac{(k+1)^2}{3}(a+b+c)^2 + k^3 - k - 2,$$

biến đổi đơn giản hai vế, ta được

$$(a+b+c)^2 \le 9.$$

Từ đó suy ra $P_{\min} = -3$ và $P_{\max} = 3$.

Bài toán 1.17. *Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $2(a^2+b^2+c^2)+abc = 7$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$a+b+c \le 3.$$

(Nguyễn Anh Khoa).

Lời Giải. Biểu thức điều kiện của bài toán có thể viết lại như sau

$$15 = 2(a^2+b^2+c^2) + [a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2+c^2+2abc+1)].$$

Bằng cách sử dụng bất đẳng thức (1) và bất đẳng thức quen thuộc $(a^2+b^2+c^2) \ge \frac{1}{3}(a+b+c)^2$, ta có

$$15 \ge \frac{2}{3}(a+b+c)^2 + [a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)] = \frac{5}{3}(a+b+c)^2.$$

Từ đó bằng cách lấy căn bậc hai hai vế, ta được

$$a+b+c \le 3.$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Nhận Xét . Bằng cách làm tương tự ta chứng minh được bài toán tổng quát sau đây
Nếu a, b, c và $k \ge 1$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $k(a^2+b^2+c^2)+abc = 3k+1$, thì

$$a+b+c \le 3.$$

(Nguyễn Văn Huyện).

Lời Giải. Thật vậy, biểu thức điều kiện có thể được viết lại như sau

$$3(2k+1) = (2k-2)(a^2+b^2+c^2) + [a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2+c^2+2abc+1)],$$

từ đó sử dụng bất đẳng thức (1) và bất đẳng thức cơ bản $a^2+b^2+c^2 \ge \frac{1}{3}(a+b+c)^2$, ta có

$$3(2k+1) \ge \frac{2k-2}{3}(a+b+c)^2 + (a+b+c)^2 = \frac{2k+1}{3}(a+b+c)^2 \qquad (1.17.1)$$

Bằng cách lấy căn hai vế, ta có ngay điều phải chứng minh.

Ngoài ra ta cũng có bài toán đảo của bất đẳng thức trên như sau.
Nếu a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c = 3$, khi đó với mọi số thực $k \ge 1$ ta luôn có bất đẳng thức

$$k(a^2+b^2+c^2)+abc \ge 3k+1.$$

(Nguyễn Văn Huyện).

Lời Giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(k-1)(a^2+b^2+c^2)+(a^2+b^2+c^2+abc) \geq 3k+1$$

Dễ thấy, bài toán có được bằng cách cộng hai bất đẳng thức sau lại với nhau

$$a^2+b^2+c^2 \geq 3$$

$$a^2+b^2+c^2+abc \geq 4.$$

Những đây là những kết quả mà ta đã biết.

Bài toán 1.18. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức*

$$3(a^2+b^2+c^2)+abc+11 \geq 7(a+b+c).$$

(Nguyễn Anh Khoa).

Lời Giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2\left[(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right]+\left[a^2+b^2+c^2+abc+5-3(a+b+c)\right] \geq 0,$$

là một kết quả hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức (1.11.1), nên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Bài toán 1.19. *Với a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng với mọi số thực dương $k \geq 1$, ta luôn có bất đẳng thức*

$$k(a^2+b^2+c^2)+abc+3k+2 \geq (2k+1)(a+b+c). \tag{1.19.1}$$

(Nguyễn Văn Huyện).

Lời Giải. Nhân 2 và hai vế của bất đẳng thức, ta có thể viết nó lại như sau

$$(2k-2)(a^2+b^2+c^2)+[a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2+c^2+2abc+1)]+3(2k+1) \geq 2(2k+1)(a+b+c). \quad (1.15.1)$$

Ở (1.17.1), ta đã chứng minh được

$$(2k-2)(a^2+b^2+c^2)+[a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2+c^2+2abc+1)] \geq \frac{2k+1}{3}(a+b+c)^2.$$

nên để chứng minh bất đẳng thức trên thì ta chỉ cần chỉ ra được

$$\frac{2k+1}{3}(a+b+c)^2+3(2k+1) \geq 2(2k+1)(a+b+c),$$

là bất đẳng thức hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM. Chứng minh hoàn tất □

Nhận Xét. Tập hợp tất cả các giá trị của k để (1.19.1) luôn đúng là $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, tuy nhiên với $k \geq 1$ thì ta nhận được lời giải bằng cách sử dụng bất đẳng thức (1). Đặc biệt với $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ thì ngoài trường tầm thường $a=b=c=1$ để bất đẳng thức xảy ra thì ta còn có thêm trường hợp khác nữa là $a=b=1+\frac{1}{\sqrt{2}}, c=0$ cùng các hoán vi.

Bài toán 1.20 *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức*

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)+4 \geq 4(ab+bc+ca)+(abc-1)^2.$$

(Nguyễn Anh Khoa).

Lời Giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$(ab+1)^2 + (bc+1)^2 + (ca+1)^2 \geq 4(ab+bc+ca).$$

từ đó đưa bài toán về chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) + 4 \geq (ab+1)^2 + (bc+1)^2 + (ca+1)^2 + (abc-1)^2,$$

tương đương với

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab+bc+ca).$$

Nhưng đây chính là bất đẳng thức (1) nên nó hiển nhiên đúng, tức ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Bài toán 1.21. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\max\left\{(a-1)^2, (b-1)^2, (c-1)^2\right\} \geq \frac{2}{3}(1-a)(1-b)(1-c).$$

(Nguyễn Anh Khoa).

Lời Giải. Sử dụng bất đẳng thức

$$\max\left\{(a-1)^2, (b-1)^2, (c-1)^2\right\} \geq \frac{(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2}{3},$$

ta đưa bài toán về chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 2(1-a)(1-b)(1-c),$$

tương đương với

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab+bc+ca).$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng. Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ □

Bài toán 1.22. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$4\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)\left(c + \frac{1}{c}\right) \geq 9(a+b+c).$$

(Vasile Cirtoaje).

Lời Giải. Ta đặt $a = \frac{\sqrt{2}}{x}, b = \frac{\sqrt{2}}{y}, c = \frac{\sqrt{2}}{z}$. Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại như sau

$$(x^2+2)(y^2+2)(z^2+2) \geq 9(xy+yz+zx).$$

Đây chính là bất đẳngthức (1.5.1), nên ta có điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \sqrt{2}$. □

Bài toán 1.23. *Cho a, b, c, d là bốn số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c + d = 4$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)(d^2+2) \geq 81$$

(Phạm Kim Hùng).

Lời Giải. Không mất tính tổng quát của bài toán, ta có thể giả sử $d = \min\{a, b, c, d\}$, khi đó ta có $0 \leq d \leq 1$. Sử dụng bất đẳng thức (1.6.1), ta được

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)(d^2+2) \geq 3(a+b+c)^2(d^2+2) = 3(4-d)^2(d^2+2).$$

Mặt khác, ta lại có

$$3(4-d)^2(d^2+2) - 81 = 3(1-d)^3(5-d) \geq 0,$$

vì vậy mà ta được

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)(d^2+2) \geq 81.$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$. □

Bài toán 1.24. *Với mọi số thực a, b, c thay đổi bất kỳ thỏa mãn điều kiện*

$$\frac{1}{a^2+b^2+4} + \frac{1}{b^2+c^2+4} + \frac{1}{c^2+a^2+4} \geq \frac{2}{3},$$

hãy chứng minh bất đẳng thức

$$ab + bc + ca \leq \frac{3}{4}.$$

(Nguyễn Văn Huyện).

Lời Giải. Do $a^2 + b^2 \geq \dfrac{(a+b)^2}{2}$, nên từ giả thiết, ta có

$$\frac{1}{(a+b)^2+8} + \frac{1}{(b+c)^2+8} + \frac{1}{(c+a)^2+8} \geq \frac{1}{3}. \tag{1.24.1}$$

Đặt $x = a+b, y = b+c, z = c+a$, ta có thể viết bất đẳng thức (1.24.1) lại thành

$$\frac{1}{x^2+8} + \frac{1}{y^2+8} + \frac{1}{z^2+8} \geq \frac{1}{3}.$$

Bằng cách sử dụng kết quả "Bài toán 1.16", ta có ngay $x + y + z \leq 3$, hay là

$$a + b + c \leq \frac{3}{2}.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức quen thuộc $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$, ta lại có

$$\frac{9}{4} \geq (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca),$$

từ đó suy ra được

$$ab + bc + ca \leq \frac{3}{4}.$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \pm\dfrac{1}{2}$. □

Bài toán 1.25. *Cho x, y, z là ba số thực không âm. Chứng minh bất đẳng thức*

$$x^2 + y^2 + z^2 + \sqrt{3xyz(x+y+z)} \geq 2(xy + yz + zx).$$

(Nguyễn Văn Huyện).

Lời Giải. Bài toán có được bằng cách cộng ngược chiều hai bất đẳng thức sau đây

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq (xy + yz + zx),$$

$$xy + yz + zx \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)}.$$

Nếu $xyz = 0$ thì bài toán trở nên tầm thường nên ta chỉ cần xét $xyz > 0$. Để ý rằng bất đẳng thức cần chứng minh ở dạng thuần nhất nên ta có thể chuẩn hóa cho $xyz = 1$, và viết nó lại như sau

$$x^2 + y^2 + z^2 + \sqrt{3(x+y+z)} \geq 2(xy + yz + zx).$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM, thì

$$x + y + z \geq 3.$$

Vì thế để chứng minh bài toán thì ta cần chứng minh được

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(xy + yz + zx),$$

hay là

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz + 1 \geq 2(xy + yz + zx).$$

Đây chính là bất đẳng thức (1) nên ta có điều phải chứng minh. Trong trường hợp tổng quát, ta có đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ hoặc $x = y, z = 0$ cùng các hoán vị. □

Bài toán 1.26. *Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 2\sqrt{1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}}.$$

Lời Giải. Đặt

$$x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a},$$

thì x, y, z là các số dương và $xyz = 1$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$1 + x + y + z \geq 2\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}},$$

hay là

$$1 + x + y + z \geq 2\sqrt{1 + yz + zx + xy}.$$

Bình phương hai vế và thu gọn lại, ta được

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(x + y + z) \geq 3 + 2(xy + yz + zx).$$

Vì $xyz = 1$ nên theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$x + y + z \geq 3,$$

vì thế để chứng minh bất đẳng thức trên thì ta cần chứng minh được

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z \geq 2(xy + yz + zx).$$

Đây chính là bất đẳng thức (1.1.1), nên ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 1.27. *Tìm số thực k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c dương*

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq k(a^2 + b^2 + c^2) + (9 - k)(ab + bc + ca).$$

(Trần Nam Dũng).

Lời Giải. Cho $a = b = 0$, khi đó ta sẽ được

$$4(c^2 + 2) \geq kc^2.$$

Từ đó dễ dàng suy ra $k \leq 4$. Với $k = 4$, ta được bất đẳng thức

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 4(a^2 + b^2 + c^2) + 5(ab + bc + ca),$$

tương đương với

$$a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 8 \geq 5(ab + bc + ca). \tag{1.27.1}$$

Đặt $x = ab, y = bc, z = ca$ thì bất đẳng thức (1.27.1) trở thành

$$xyz + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq 5(x + y + z).$$

Đây chính là bất đẳng thức (1.12.1) nên nó hiển nhiên đúng. Vậy $k = 4$, là giá trị lớn nhất cần tìm. □

Qua những ví dụ trên chắc hẳn các bạn cũng đã phần nào thấy được ứng dụng rộng rãi của bất đẳng thức (1), một bài toán tuy đơn giản nhưng những ứng dụng của nó thì thì quả thật không đơn giản tí nào. Chúng ta hãy cùng xem lại bài toán này một lần nữa

Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi bất kỳ. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca).$$

Từ bài toán trên ta có thể sáng tạo ra hàng loạt bài toán liên quan khác, khó hơn như các bạn đã thấy. Đó chính là những bí ẩn sau vẻ đẹp của mỗi bài toán.

Trong bất đẳng thức điều kiện để một bất đẳng thức trở thành một bài toán hay thì điều đầu tiên là nó phải đẹp không có điều kiện rắc rối phức tạp và ở dạng chuẩn và ta phải giải quyết được bài toán tổng quát của nó. Bất đẳng thức (1) cũng giống như thế, ta cũng có kết quả tổng quát của nó như sau

Tổng Quát. *Với $x_1, x_2, ..., x_n$ $(n \geq 2)$ là các số thực không âm, khi đó ta luôn có*

$$(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2) + 2x_1x_2...x_n + n - 2 \geq (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2.$$