VỀ MỘT BÀI TOÁN TRONG "HELLO IMO 2007"

Nguyễn Văn Huyện, SV Đại học Giao Thông Vận Tải Tp.HCM

Thành phố Hồ Chí Minh ngày 15/2/2012

1 Lời nói đầu.

Bài viết nói về xuất xứ của một trong hai bài toán bất đẳng thức được thầy Trần Nam Dũng đề nghị trong cuộc thi Hello IMO 2007 do tạp chí Toán Học & Tuổi Trẻ tổ chức, nhằm chào mừng sự kiện Việt Nam đăng cai kỳ thi Oympic Toán Quốc Tế lần thứ 48 vào năm 2007 (IMO 2007).

Nội dung chính của bài viết được lấy từ blog cá nhân của thầy Trần Nam Dũng (namdung) trên diễn đàn toán học MathVn.org và được tác giả biên soạn, bổ sung một thêm một phần lời giải.

2 Nội dung bài viết.

Sự ra đời của các bài toán đều có những thú vị riêng của nó. Với tôi, có những bài toán mà tôi sẽ quên ngay, vì tôi cũng không bỏ nhiều công sức để "mang nặng đẻ đau", nhưng cũng có những bài toán mà mình nhớ mãi.

Dưới đây xin kể lại với các bạn về một trong hai bài toán trong cuộc thi Hello IMO 2007, về xuất xứ cũng như số phận của nó.

Cuối năm 2006, thầy Nguyễn Khắc Minh có điện thoại nhờ tôi ra một số đề toán cho cuộc thi Hello IMO 2007 mà Ban tổ chức IMO 2007 phối hợp với báo Toán Học & Tuổi Trẻ tổ chức.

Tôi đã bỏ mất mấy đêm và gửi cho thầy Minh 2 bài toán, trong file word đề ngày 24/12/2006. Chúng ta hãy cùng đến với nội dung của một trong hai bài toán đó.

Bài toán. *Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức*

$$xyz + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq 5(x + y + z). \tag{1}$$

Lời Giải 1. Không mất tính tổng quát của bài toán, ta có thể giả sử $x \geq y \geq z$. Khi đó nếu $z \geq 4$, thì

$$xyz = \frac{x \cdot yz + y \cdot zx + z \cdot xy}{3} \geq \frac{16}{3}(x + y + z) > 5(x + y + z).$$

Vì thế bất đẳng thức (1) hiển nhiên đúng. Vậy ta chỉ còn chứng minh bài toán trong trường hợp $z < 4$. Ta đặt

$$f(x, y, z) = xyz + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 - 5(x + y + z),$$

và sẽ đi chứng minh

i) $f(x, y, z) \geq f(t, t, z)$ với $t = \dfrac{x + y}{2}$.

ii) $f(t, t, z) \geq 0$.

Thật vậy, ta có i) tương đương với

$$xyz + 2(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{z(x + y)^2}{4} - 2\left[\frac{(x + y)^2}{2} + z^2\right] \geq 0,$$

hay

$$(x - y)^2(4 - z) \geq 0. \qquad \text{(luôn đúng dó } z < 4)$$

Còn ii) thì tương đương với

$$t^2z + 4t^2 + 2z^2 + 8 - 5(2t + z) \ge 0,$$

$$(z + 4)t^2 - 10t + 2z^2 - 5z + 8 \ge 0. \tag{2}$$

Xem biểu thức ở vế trái của (2) là một tam thức bậc 2 theo t, tam thức này có biệt thức

$$\begin{aligned}\Delta' &= 25 - (z + 4)(2z^2 - 5z + 8)\\ &= -(2z + 7)(z - 1)^2 \le 0.\end{aligned}$$

Nên từ đó suy ra (2) đúng và nghĩa là ii) đúng. Vậy bài toán được giải quyết hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Lời Giải 2. Bằng cách đặt $x = 1 + a,\ y = 1 + b,\ z = 1 + c$ với $a, b, c > -1$, sau đó thay các biến mới này vào bất đẳng thức và thu gọn lại, ta được

$$abc + ab + bc + ca + 2(a^2 + b^2 + c^2) \ge 0. \tag{3}$$

Dễ thấy $ab + bc + ca + 2(a^2 + b^2 + c^2) \ge 0$, vì thế nếu $abc \ge 0$ thì bất đẳng thức (3) đúng còn ngược lại nếu $abc < 0$, thì ta xét các trường hợp sau đây.

Trường hợp 1: Cả ba số đều < 0, khi đó $-1 < a, b, c < 0$, từ đó suy ra $|abc| < 1$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge 3(abc)^{\frac{2}{3}} \ge 3|abc|,$$

nên

$$abc + ab + bc + ca + 2(a^2 + b^2 + c^2) \ge abc + 3|abc| + (ab + bc + ca + a^2 + b^2 + c^2) \ge 0.$$

Trường hợp 2: Có ít nhất một số < 0 hai số còn lại đều > 0. Giả sử $a < 0$ còn $b, c > 0$ thì do $a > -1$ nên $abc > -bc$, vì thế ta có

$$\begin{aligned}abc + ab + bc + ca + 2(a^2 + b^2 + c^2) &> -bc + ab + bc + ca + 2(a^2 + b^2 + c^2)\\ &= ab + ca + 2(a^2 + b^2 + c^2)\\ &= \frac{(a + b)^2}{2} + \frac{(c + a)^2}{2} + a^2 + \frac{3}{2}(b^2 + c^2) \ge 0.\end{aligned}$$

Chứng minh hoàn tất. □

Lời Giải 3. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 + x^2 + y^2 + z^2 + xyz + 5 \ge 3(x + y + z),$$

hay

$$2[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2] + (x+y+z-3)^2 + [x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz + 1 - 2(xy + yz + zx)] \ge 0,$$

vì thế để chứng minh bất đẳng thức đã cho thì ta cần chứng minh bất đẳng thức sau đây

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz + 1 \ge 2(xy + yz + zx).$$

Ta có bốn cách để chứng minh bất đẳng thức đẹp này

<u>Cách 1.</u> Ta sẽ sử dụng phương pháp tam thức bậc hai để chứng minh bài toán. Bất đẳng thức được chuyển về dạng tam thức bậc hai như sau

$$f(x) = x^2 + 2x(yz - y - z) + (y - z)^2 + 1 \ge 0$$

- Nếu $yz \ge y + z$ thì ta sẽ có ngay điều phải chứng minh.

- Xét trường hợp ngược lại $yz \le y+z$, và điều này tương đương với $(y-1)(z-1) \le 1$. Khi đó ta tính được biệt thức Δ' của $f(x)$ là

$$\begin{aligned}\Delta' &= (yz-y-z)^2-(y-z)^2-1\\ &= yz(y-2)(z-2)-1.\end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Có đúng một trong hai số y, z lớn hơn 2, số còn lại không lớn hơn 2. Trong trường hợp này ta có $(y-2)(z-2) \le 0$, và từ đó suy ra $\Delta' \le 0$.

Trường hợp 2: Cả hai số y, z đều không lớn hơn 2. Khi đó theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\Delta' = yz(2-y)(2-z)-1 \le \left[\frac{y+z+(2-y)+(2-z)}{4}\right]^4 - 1 = 0.$$

Tóm lại trong mọi trường hợp ta điều có $\Delta' \le 0$. Tức $f(x) \ge 0$ và đây chính là điều mà ta phải chứng minh. □

<u>Cách 2.</u> Theo nguyên lý Dirichlet, ta thấy rằng trong ba số $x,\ y,\ z$ sẽ có hai số hoặc cùng ≥ 1 hoặc cùng ≤ 1. Giả sử hai số đó là $x,\ y$ khi đó

$$(x-1)(y-1) \ge 0.$$

Từ đây, bằng cách sử dụng hằng đẳng thức

$$x^2+y^2+z^2+2xyz+1-2(xy+yz+zx) = (x-y)^2+(z-1)^2+2z(x-1)(y-1) \ge 0,$$

ta thu được ngay bất đẳng thức cần phải chứng minh. □

<u>Cách 3.</u> Ta sẽ sử dụng phương pháp dồn biến để chứng minh bài toán. Không mất tính tổng quát của bài toán, ta giả sử $z = \min\{x,\ y,\ z\}$, và đặt

$$f(x,\ y,\ z) = x^2+y^2+z^2+2xyz+1-2(xy+yz+zx),$$

ta có

$$f(x,\ y,\ z) - f\left(\sqrt{xy},\ \sqrt{xy},\ z\right) = \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left(x+y+2\sqrt{xy}-2z\right) \ge 0.$$

Do đó $f(x,\ y,\ z) \ge f\left(\sqrt{xy},\ \sqrt{xy},\ z\right)$. Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$f\left(\sqrt{xy},\ \sqrt{xy},\ z\right) \ge 0.$$

Thật vậy, nếu đặt $t = \sqrt{xy}$, thì ta có

$$f(t,\ t,\ c) = 2t^2+z^2+2t^2z-2(t^2+2tz)+1 = (z-1)^2+2z(t-1)^2 \ge 0.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

<u>Cách 4.</u> Sử dụng lần lượt bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$2xyz+1 = xyz+xyz+1 \ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \ge \frac{9xyz}{x+y+z}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$x^2+y^2+z^2+\frac{9xyz}{x+y+z} \ge 2(xy+yz+zx).$$

Thực hiện phép khai triển trực tiếp, ta có bất đẳng thức tương đương với

$$x^3+y^3+z^3+3xyz \ge xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x),$$

đúng vì đây chính là bất đẳng thức Schur dạng bậc ba nên ta có điều phải chứng minh. □

Lời Giải 4. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$x+y+z=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot(x+y+z)\le\frac{1}{6}\left[9+(x+y+z)^2\right].$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$12(x^2+y^2+z^2)+6xyz+48\ge 5\left[(x+y+z)^2+9\right].$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$7(x^2+y^2+z^2)+6xyz+3\ge 10(xy+yz+zx),$$

$$4(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3\left[x^2+y^2+z^2+2xyz+1-2(xy+yz+zx)\right]\ge 0,$$

đúng vì ta có $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$ (theo AM-GM) và

$$x^2+y^2+z^2+2xyz+1\ge 2(xy+yz+zx)$$

Bất đẳng thức này đã được chứng minh ở phần trên vì thế bài toán được chứng minh xong. □

Nhận Xét:

1) Đây là một bất đẳng thức không thuần nhất nhưng không có điều kiện chuẩn, vì vậy khó thuần nhất hoá, ngoại trừ cách thêm biến phụ như sau

$$xyz+2(x^2+y^2+z^2)t+8t^3\ge 5(x+y+z)t^2.$$

2) Cách chứng minh thứ nhất dùng hai ý là dồn biến và tam thức bậc 2. Ở đây có hai điểm khó cần xử lý: Khi dồn biến, ta phải xử lý được trường hợp $z>4$, còn điểm khó thứ hai chính là bất đẳng thức (2). Thông thường khi dồn biến được về hai biến bằng nhau thì bất đẳng thức $f(t,t,z)\ge 0$ có thể chứng minh khá dễ dàng bằng cách dùng phân tích đa thức ra thừa số, nhưng (2) không phải là một trường hợp như vậy. Nếu không dùng tam thức bậc 2, ta sẽ gặp đôi chút khó khăn.

3) Bài toán này có một xuất xứ khá thú vị. Tại kỳ thi Olympic Toán Châu Á Thái Bình Dương năm 2004 (APMO 2004), có bài toán sau đây
Chứng minh rằng với mọi số thực dương bất kỳ, ta luôn có

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca).$$

Bài toán này có nhiều cách giải khác nhau, trong đó có một cách giải chứng minh được bất đẳng thức mạnh hơn, đó là

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 3(a+b+c)^2.$$

Nếu chú ý rằng, $3(a+b+c)^2=3(a^2+b^2+c^2)+6(ab+bc+ca)$, thì một câu hỏi rất tự nhiên được đặt ra:
"Tìm số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c dương"

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge k(a^2+b^2+c^2)+(9-k)(ab+bc+ca).$$

Để tìm điều kiện cho k, ta cho $a=b=0$, khi đó ta sẽ được $4(c^2+2)\ge kc^2$. Từ đó dễ dàng suy ra $k\le 4$. Với $k=4$, ta được bất đẳng thức

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 4(a^2+b^2+c^2)+5(ab+bc+ca),$$

tương đương với

$$a^2b^2c^2+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+8\ge 5(ab+bc+ca). \tag{4}$$

Đặt $x = ab, y = bc, z = ca$ thì bất đẳng thức (4) trở thành

$$xyz + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq 5(x + y + z).$$

Đây chính là bất đẳng thức (1). Như vậy (1), có thể nói, chính là phương án làm mạnh tốt nhất của bất đẳng thức APMO 2004.

4) Ta thấy (1) đúng với mọi số thực dương x, y, z, và như thế, nó cũng sẽ đúng với trường hợp $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, và ta có bài toán
Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, chứng minh rằng

$$xyz + 14 \geq 5(x + y + z).$$

Bài này khá giống với bài VMO 2002. Và cách giải của bài toán cho chúng ta một cách tiếp cận nữa cho lời giải bài VMO 2002. Ngoài ra, bằng cách cho $x + y + z = 3$, đưa chúng ta đến bất đẳng thức

$$xyz + 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 7.$$

Tuy nhiên, bất đẳng thức này khá yếu.

5) Theo cách chứng minh thứ hai thì (1) chưa phải là mạnh nhất theo nghĩa sau
"*Tìm số thực k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức*

$$xyz + 2 + k[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2] \geq x + y + z, \tag{5}$$

đúng với mọi x, y, z dương".

Trong (5), nếu ta cho $k = 2$ thì ta thu được bất đẳng thức (1). Nếu áp dụng cách chứng minh thứ hai, có thể chứng tỏ (5) vẫn đúng cho $k = \frac{4}{3}$. Và để kết kết thúc bài viết xin được đưa ra hai chứng minh bất đẳng thức (5).

Lời Giải 1 . Cho $x = y = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, z = 0$ ta được $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ta sẽ chứng minh đây chính là giá trị nhỏ nhất cần tìm, tức chứng minh bất đẳng thức sau đây

$$xyz + 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2] \geq x + y + z.$$

Thật vậy, theo nguyên lý Dirichlet, ta thấy rằng trong ba số x, y, z sẽ có hai số hoặc cùng ≥ 1 hoặc cùng ≤ 1. Giả sử hai số đó là x, y khi đó $(x-1)(y-1) \geq 0$. Suy ra $xy \geq x + y - 1$.

Sử dụng đánh giá này ta quy bài toán về chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$z(x + y - 1) + \frac{1}{\sqrt{2}}[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2] \geq x + y + z,$$

tương đương với

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \geq \sqrt{2}(x + y - 2)(z - 1).$$

Sử dụng lần lượt các bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 &\geq \frac{(x+y-2)^2}{2} + (z-1)^2 \\ &\geq \sqrt{2}\,|(x+y-2)(z-1)| \\ &\geq \sqrt{2}(x+y-2)(z-1).\end{aligned}$$

Chứng minh hoàn tất. Vậy ta có kết luận $k_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. □

Lời Giải 2. Bất đẳng thức trên có thể viết lại dưới dạng tương đương là

$$k(x^2 + y^2 + z^2) + xyz + 3k + 2 \geq (2k+1)(x + y + z).$$

Ta cũng giả sử $(x-1)(y-1) \geq 0$, để thu được đánh giá $xy \geq x+y-1$. Từ đó suy ra

$$k(x^2+y^2+z^2)+xyz+3k+2 \geq k(x^2+y^2+z^2)+(x+y-1)z+3k+2.$$

Vậy ta đưa bài toán về chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn sau đây

$$k(x^2+y^2+z^2)+(x+y-1)z+3k+2 \geq (2k+1)(x+y+z).$$

Đến đây ta đặt $t = \dfrac{x+y}{2}$, và sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có $x^2+y^2 \geq 2t^2$. Do đó ta cần chứng minh

$$k(2t^2+z^2)+(2t-1)z+3k+2-(2k+1)(2t+z) \geq 0,$$

tương đương với

$$f(t) = 2k \cdot t^2 + 2(z-2k-1) \cdot t + z^2k - 2zk - 2z + 2 + 3k \geq 0.$$

Để $f(t)$ không âm thì ta chỉ cần biệt thức Δ_t' của nó là một số không dương là được. Ta có

$$\begin{aligned} \Delta_t' &= (z-2k-1)^2 - 2k\left(z^2k - 2zk - 2z + 2 + 3k\right) \\ &= -(z-1)^2\left(2k^2-1\right). \end{aligned}$$

Ta thấy rằng để $\Delta_t' \leq 0$ thì ta phải có $2k^2-1 \geq 0$, tức là $k \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài toán được chứng minh hoàn toàn. □

Tài Liệu Tham Khảo

[1] Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo bất đẳng thức*, nhà xuất bản Tri Thức, 2006.

[2] Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Bất đẳng thức và những lời giải hay*, nhà xuất bản Hà Nội, 2009.

[3] Diễn đàn toán học MathVn.org

[4] Diễn đàn Onluyentoan.vn