PHƯƠNG PHÁP S-S

VÀ

BẤT ĐẲNG THỨC DẠNG SCHUR

Nguyễn Văn Huyện

SV trường Đại học Giao Thông Vận Tải Tp.HCM

nguyenhuyen_ag@yahoo.com

1. Lời nói đầu

Trước hết xin nhắc lại cơ sở của phương pháp S-S (S.O.S-Schur). Như chúng ta đã biết, để chứng minh một bài toán bất đẳng thức ba biến dạng đối xứng hoặc hoán vị bằng phương pháp S-S thì việc làm đầu tiên là đưa nó về dạng chuẩn tắc như sau

$$M(a-b)^2+N(a-c)(b-c)\geq 0.$$

Chúng ta bắt đầu khai thác giả thiết của bài toán. Đầu tiên là ta sẽ có $(a-b)^2\geq 0.$ Nếu bất đẳng thức đã cho ở dạng đối xứng thì ta sẽ sắp xếp thứ tự các biến, chẳng hạn như ta sẽ sắp xếp $a\geq b\geq c,$ còn nếu bất đẳng thức có dạng hoán vị thì ta sẽ chọn phần tử cực hạn (chọn phần tử nhỏ nhất hoặc lớn nhất) ví dụ ta sẽ chọn $c=\min\{a,b,c\}$ hoặc là $c=\max\{a,b,c\}$ để suy ra được $(b-c)(a-c)\geq 0.$ Vì vậy, trong S-S công việc của ta là phải chứng minh được M,N đều là các đại lượng không âm. Có những trường hợp công việc này sẽ rất đơn giản hiển nhiên nhưng cũng đôi khi lại rất hóc búa.

Vì ý tưởng của S-S xuất phát từ bất đẳng thức Shur và S.O.S nên S-S tỏ ra rất hiệu quả trong việc chứng minh các bất đẳng thức có dạng Shur như sau

$$F(a,b,c)abc\geq P(a,b,c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b),\quad \left(P(a,b,c)\geq F(a,b,c)\right)$$

mà nếu như ta sử dụng các phương pháp có thể dài dòng và khá phức tạp.
Trong bài viết nhỏ này chúng ta sẽ sử dụng một số phân tích cơ sở sau để chứng minh các bài toán ví dụ điển hình

$$abc-(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=(a-b)^2(a+b-c)+c(a-c)(b-c)$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=(a-b)^2+(a-c)(b-c)$$

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)-6abc=2c(a-b)^2+(a+b)(a-c)(b-c)$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a-b)^2+(a+b+c)(a-c)(b-c).$$

Ngoài ra còn có một số các phân tích khác mà các bạn có thể tự mình phát triển thêm.

2. Các bài toán áp dụng

Bài toán 1. *Với* a,b,c *là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$abc(ab+bc+ca)\ge (a^2+b^2+c^2)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

(Old and New Inequalities, Volume 1)

Lời Giải. Bất đẳng thức này từng xuất hiện trong quyển sách Old and New Inequalities Vol 1 của một nhóm các chuyên gia bất đẳng thức Vasile Cirtoaje, Titu Andresscu, Micrea Lascu,...Lời giải trong quyển sách này là quy bài toán về chứng minh một bất đẳng thức hình học. Ở đây, chúng tôi xin được giới thiệu với các bạn một lời giải bằng phương pháp S-S khá đơn giản.

Không mất tính tổng quát của bài toán, ta có thể giả sử $a\ge b\ge c$. Bất đẳng thức trên được viết lại như sau

$$(a^2+b^2+c^2)\left[abc-(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\right]\ge abc(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca),$$

$$(a^2+b^2+c^2)\left[(a-b)^2+c(a-c)(b-c)\right]\ge abc\left[(a-b)^2+(a-c)(b-c)\right],$$

$$M(a-b)^2+N(a-c)(b-c)\ge 0,$$

trong đó

$$M=(a^2+b^2+c^2)(a+b-c)$$
$$N=(a^2+b^2+c^2)c-abc.$$

Ta cần chứng minh được M,N là các số không âm. Thật vậy, ta có

$$M=(a^2+b^2+c^2)(a+b-c)\ge a^2\cdot a-abc=a(a^2-bc)\ge 0$$
$$N=(a^2+b^2+c^2)c-abc=c\left[(a^2-ab+b^2)+c^2\right]\ge 0.$$

Chứng minh hoàn tất, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

Nhận Xét. Ta có bài toán tổng quát của bài toán trên là

Tìm số thực k lớn nhất sao bất đẳng thức

$$abc \ge \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)^k (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b),$$

luôn đúng với mọi số thực dương a,b,c tùy ý.

Bài toán 2. *Nếu a,b,c là các số thực dương, thì*

$$4a^2b^2c^2 \ge (a^3+b^3+c^3+abc)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

Lời Giải. Bất đẳng thức này từng xuất hiện trên diễn đàn bất đẳng thức Việt Nam VIMF với lời giải bằng S.O.S rất khá dài và phức tạp. Năm 2009 trong quyển sách Inequalities with Beautiful Solution các tác giả Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, Vasile Cirtoaje đã đưa ra một cách sử dụng bất đẳng thức AM-GM khá độc đáo. Ở đây với S-S ta có một lời giải khá đơn giản như sau.

Đầu tiên, ta kí hiệu

$$\sum a^3 = a^3+b^3+c^3$$
$$\prod (a+b-c) = (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b),$$

và giả sử $a \ge b \ge c$. Bất đẳng thức trên có thể viết lại như sau

$$\left(\sum a^3 + abc\right)\left[abc - \prod (a+b-c)\right] \ge abc\left(a^3+b^3+c^3-3abc\right),$$

$$\left(\sum a^3 + abc\right)\left[(a-b)^2(a+b-c) + c(a-c)(b-c)\right] \ge abc\left(\sum a\right)\left[(a-b)^2 + (a-c)(b-c)\right],$$
$$M(a-b)^2 + N(a-c)(b-c) \ge 0,$$

trong đó

$$M = (a^3+b^3+c^3+abc)(a+b-c) - abc(a+b+c)$$
$$N = (a^3+b^3+c^3+abc)c - abc(a+b+c).$$

Ta sẽ chứng minh được M, N đều là các số không âm. Ta có

$$\begin{aligned}
M &= \left(a^3+b^3+c^3+abc\right)\left(a+b-c\right)-abc\left(a+b+c\right)\\
&= \left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a+b-c\right)-2abc\cdot c\\
&\geq 3abc\cdot a-2abc\cdot c\\
&= abc\left(3a-2c\right)\geq 0.\\
N &= \left(a^3+b^3+c^3+abc\right)c-abc\left(a+b+c\right)\\
&= c\left[a^3+b^3+c^3+abc-ab\left(a+b+c\right)\right]\\
&= c\left[a^3+b^3-ab\left(a+b\right)\right]\\
&= c\left(a-b\right)^2\left(a+b\right)\geq 0.
\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$. □

Bài toán 3. *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức*

$$8a^2b^2c^2 \geq \left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\left(a+b-c\right)\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right).$$

(Nguyễn Văn Huyện)

Lời Giải. Kí hiệu

$$\prod\left(a+b\right)=\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right).$$

Ta viết bất đẳng thức lại thành

$$\prod\left(a+b\right)\left[abc-\left(a+b-c\right)\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)\right]\geq abc\left[\prod\left(a+b\right)-8abc\right],$$

$$\prod\left(a+b\right)\left[\left(a-b\right)^2\left(a+b-c\right)+c\left(a-c\right)\left(b-c\right)\right]\geq abc\left[2c\left(a-b\right)^2+\left(a+b\right)\left(a-c\right)\left(b-c\right)\right],$$

$$M\left(a-b\right)^2+N\left(a-c\right)\left(b-c\right)\geq 0,$$

với

$$\begin{aligned}
M &= \left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\left(a+b-c\right)-2abc\cdot c\\
N &= \left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)c-abc\left(a+b\right).
\end{aligned}$$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned} M &= (a+b)(b+c)(c+a)(a+b-c) - 2abc\cdot c \\ &\geq 8abc\cdot a - 2abc\cdot c = abc(8a-2c) \geq 0. \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} N &= (a+b)(b+c)(c+a)c - abc(a+b) \\ &= c(a+b)\left[(b+c)(c+a) - ab\right] \\ &\geq c(a+b)(b\cdot a - ab) = 0. \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. □

Bài toán 4. *Chứng minh rằng nếu a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác, thì*

$$(a+b)(b+c)(c+a) + (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \geq 9abc$$

(Cosmin Pohoata Virgil Nicula, Math. Reflections)

Lời Giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \max\{a,b,c\}$. Ta viết bất đẳng thức lại như

$$(a+b)(b+c)(c+a) - 8abc \geq abc - (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b),$$

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) - 6abc \geq abc - (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b),$$

$$2c(a-b)^2 + (a+b)(a-c)(b-c) \geq (a-b)^2(a+b-c) + c(a-c)(b-c),$$

$$(a-b)^2(3c-a-b) + (a+b-c)(a-c)(b-c) \geq 0.$$

Bất đẳng thức trên đúng theo giả thiết của c và giả thiết a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác, tức ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 5. *Chứng minh rằng với mọi số dương a,b,c ta luôn có*

$$abc(a+b+c)^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

(Nguyễn Văn Huyện)

Lời Giải. Giả sử $c=\min\{a,b,c\}$. Bất đẳng thức trên được viết lại như sau

$$3(a^2+b^2+c^2)\left[abc-\prod(a+b-c)\right]\ge abc\left[3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2\right],$$

$$3(a^2+b^2+c^2)\left[(a-b)^2(a+b-c)+c(a-c)(b-c)\right]\ge 2abc\left[(a-b)^2+c(a-c)(b-c)\right],$$

$$M(a-b)^2+N(a-c)(b-c)\ge 0,$$

với

$$M=3(a^2+b^2+c^2)(a+b-c)-2abc$$
$$N=3(a^2+b^2+c^2)c-2abc.$$

Ta có

$$\begin{aligned}M&=3(a^2+b^2+c^2)(a+b-c)-2abc\\&\ge 3a^2\cdot a-2abc=a(3a^2-2bc)\ge 0.\\N&=3(a^2+b^2+c^2)c-2abc\\&\ge 3a^2\cdot c-2abc=c(3a^2-2bc)\ge 0.\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 6. *Cho* a,b,c *là các số thực dương và đặt*

$$E(a,b,c)=a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b).$$

Chứng minh rằng

$$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)E(a,b,c)\ge(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

(*Vasisle Cirtoaje*, Algebraic Inequalities)

Lời giải. Chú ý rằng

$$E(a,b,c)=abc-(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b),$$

Nên bất đẳng thức tương đương với

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left[abc-(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\right]\geq a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca,$$

$$\frac{ab+bc+ca}{abc}\left[(a-b)^2(a+b-c)+c(a-c)(b-c)\right]\geq (a-b)^2+(a-c)(b-c),$$

$$M(a-b)^2+N(a-c)(b-c)\geq 0,$$

với

$$\begin{aligned} M &= (ab+bc+ca)(a+b-c)-abc \\ N &= (ab+bc+ca)c-abc. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} M &= (ab+bc+ca)(a+b-c)-abc \\ &\geq bc\cdot a-abc=0 \\ N &= (ab+bc+ca)c-abc \\ &= c^2(a+b)\geq 0. \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Để kết thúc bài viết này xin giới thiệu một số bài toán tương tự để các bạn tự luyện.

3. Bài tập tương tự

Bài toán 6. Với a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$27a^2b^2c^2 \ge (a+b+c)^3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

Bài toán 7. Nếu a,b,c là các số thực dương, thì

$$9a^2b^2c^2 \ge (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

(Nguyễn Văn Huyện)

Bài toán 8. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a,b,c ta luôn có

$$abc(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \ge 3(a^3+b^3+c^3)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

(Nguyễn Văn Huyện)

Bài toán 9. Cho a,b,c là các số thực dương và đặt

$$E(a,b,c) = a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b),$$

Chứng minh rằng

$$(a+b+c)E(a,b,c) \ge ab(a-b)^2+bc(b-c)^2+ca(c-a)^2.$$

(Vasile Cirtoaje, Algebraic Inequalities)

Ngoài ra các bạn có thể tự mình sáng tạo ra các bài toán mới bằng cách ghép ngược chiều các bất đẳng thức khác với bất đẳng thức Schur theo dạng

$$F(a,b,c)abc \ge P(a,b,c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b),$$

và sau đó kiểm tra nó bằng S-S, chắc hẳn rằng các bạn sẽ tìm được riêng cho mình những bài toán hay và độc đáo. Chúc các bạn thành công.

4. Tài liệu tham khảo

[1] Titu Andresscu, Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu, *Old and New Inequalities*, volume 1, GIL Publishing House, 2004.

[2] Vasile Cirtoaje, *Algebraic Inequalities Old and New Methods* GIL Publishing House, 2004

[3] Phạm Kim Hùng, *Secrets in Inequalities*, volume 2 : Advanced Inequalities, GIL Publishing House, 2008.

[4] Võ Quốc Bá Cẩn, Cosmin Pohoata, *Old and New Inequalities*, volume 2, GIL Publishing House, 2009.

[5] Vasile Cirtoaje, Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Inequalities with Beautiful Solution*, GIL Publishing House, 2009.

.

Thành phố Hồ Chí Minh

22h22’ tối ngày 29/05/2012